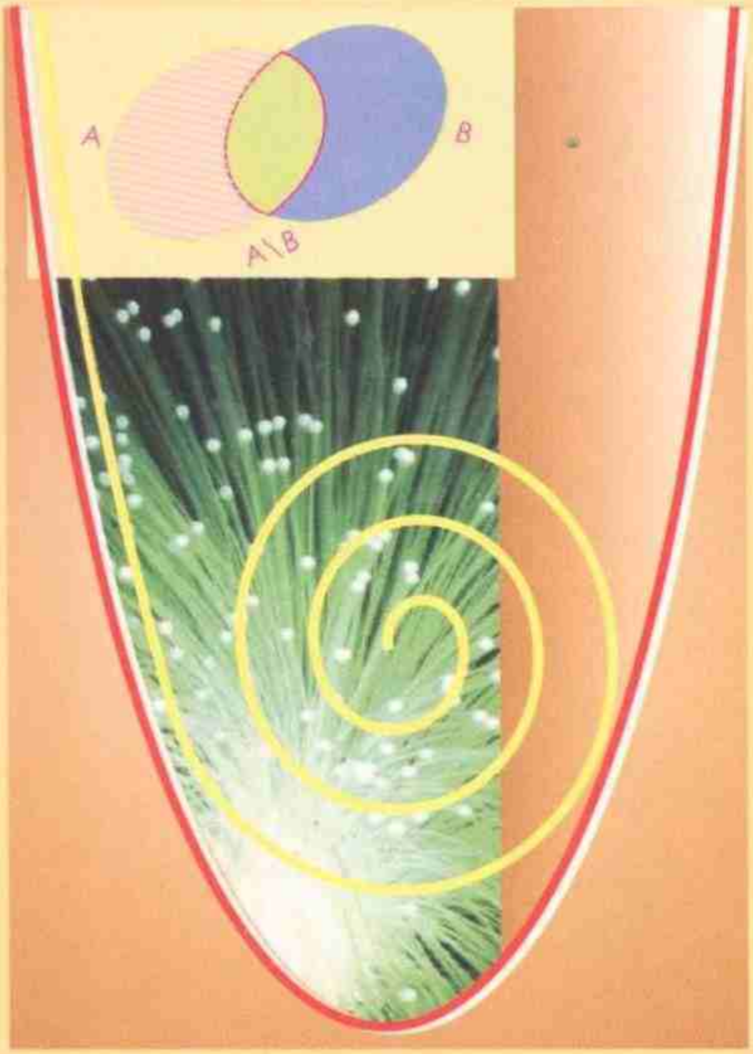
VÕ GIANG GIAI

Các chủ đề ĐẠI SỐ 10 nâng cao



ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Thạc sĩ VÕ GIANG GIAI

CÁC CHỦ ĐỀ
ĐẠI SỐ 10 NÂNG CAO

- Giới thiệu Đề thi Đại học & Cao đẳng
- Giới thiệu Đề thi Olympic 30 – 4 & Đề Toán trên Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ"
- Sách dùng cho học sinh khá và giỏi

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương I. MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mệnh đề

Ở đây ta hiểu một mệnh đề là một phát biểu mà ta có thể gán cho nó một giá trị logic : đúng hoặc sai.

Ví dụ :

1. "Số 9 là số nguyên tố" (sai);
2. "Thành phố Hồ Chí Minh không phải là thủ đô của nước Việt Nam" (đúng);
3. "Maradona đã từng là cầu thủ bóng đá nổi tiếng nhất thế giới" (đúng);
4. "Nha Trang là một thành phố của tỉnh Ninh Thuận" (sai);
5. "Một học sinh nếu học giỏi môn Toán thì sẽ học giỏi môn Lí" (điều này chưa chắc),

Như vậy : 1, 2, 3 và 4 là các mệnh đề, 5 không phải là mệnh đề.

2. Các phép toán mệnh đề

2.1. Phép phủ định

Cho mệnh đề P. Khi đó ta gọi *phủ định* của mệnh đề P là mệnh đề $\overline{P}$ (đọc là : không P) đúng nếu P sai, sai nếu P đúng.

Bảng chân trị của phép phủ định :

P	$\overline{P}$
Đ	S
S	Đ

Ví dụ :

1. P : "10 ⋮ 3" (mệnh đề sai)

   ⇒ $\overline{P}$: "10 ⋮̸ 3" (mệnh đề đúng);

2. P : "$2005^2 + 2006^2 \geq 2.2005.2006$" (mệnh đề đúng)

   ⇒ $\overline{P}$: "$2005^2 + 2006^2 < 2.2005.2006$" (mệnh đề sai).

2.2. Phép giao

Cho hai mệnh đề p và q. Khi đó ta gọi *giao* của hai mệnh đề p và q là mệnh đề p ∧ q (đọc là : p và q) đúng khi cả p và q đều đúng, sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép giao :

p	q	p ∧ q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

Ví dụ : Giao của hai mệnh đề "p > 2" và "p < 3" là mệnh đề "2 < p < 3"

2.3. Phép hợp

Cho hai mệnh đề p và q. Khi đó ta gọi *hợp* của hai mệnh đề p và q là mệnh đề p ∨ q (đọc là : p hay q) sai khi của p và q đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép hợp :

p	q	p ∨ q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Ví dụ : Hợp của hai mệnh đề "p > 2" và "p = 2" là mệnh đề p ≥ 2".

2.4. Phép kéo theo

Cho hai mệnh đề p và q. Khi đó ta gọi p *kéo theo* q là mệnh đề p ⇒ q sai nếu p đúng và q sai, đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép kéo theo :

p	q	p ⇒ q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

Nhận xét :

- Từ một mệnh đề sai ta luôn luôn suy ra được mọi khẳng định đúng, vì vậy trong thực tế ta không bao giờ bàn luận đến những lí luận có giả thiết sai.
- Thông thường $p \Rightarrow q$ ta hay đọc là "nếu p thì q", "p là điều kiện đủ để có q", "q là điều kiện cần để có p"

Ví dụ : "Nếu $a = b$ thì $a^{2008} = b^{2008}$" ...

2.5. Phép tương đương

Cho hai mệnh đề p và q. Khi đó ta gọi p *tương đương* q là mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ đúng khi p và q cùng đúng hoặc cùng sai, sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép tương đương :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	Đ

Nhận xét :

Thông thường $p \Leftrightarrow q$ ta đọc là "p là điều kiện cần và đủ để có q".

Ví dụ : "$a = b$ là điều kiện cần và đủ để có $a^{2007} = b^{2007}$".

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1 : DÙNG TRỰC TIẾP ĐỊNH NGHĨA

Bài 1. Hãy xét chân trị các mệnh đề sau :

a) $\left(\frac{3}{2} < \frac{1}{2}\right) \wedge (3 > 1)$

b) $(a^2 + b^2 \geq 2ab) \vee ((-1)^2 < 0)$

c) $(|a| \geq 0) \Rightarrow (3^2 + 4^2 < 5^2)$

d) $(\pi^2 = 9) \vee (3 > 51)$

e) $(1 + 2 + 3 + 4 = 18) \wedge (0 < -12)$.

Giải

a) Vì $\left(\frac{3}{2} < \frac{1}{2}\right)$ sai nên $\left(\frac{3}{2} < \frac{1}{2}\right) \wedge (3 > 1)$ sai.

b) $(a^2 + b^2 \geq 2ab)$ đúng nên $(a^2 + b^2 \geq 2ab) \vee ((-1)^2 < 0)$ đúng.

c) Vì : $\begin{cases} \bullet\ (|a| \geq 0) & \text{đúng} \\ \bullet\ (3^2 + 4^2 < 5^2) & \text{sai} \end{cases}$ nên $(|a| \geq 0) \Rightarrow (3^2 + 4^2 < 5^2)$ sai.

d) Vì : $\begin{cases} \bullet\ (\pi^2 = 9) & \text{sai} \\ \bullet\ (3 > 51) & \text{sai} \end{cases}$ nên $(\pi^2 = 9) \vee (3 > 51)$ sai.

e) Vì $(0 < -12)$ sai nên $(1 + 2 + 3 + 4 = 18) \wedge (0 < -12)$ sai.

Bài 2. Cho biết chân trị của các mệnh đề sau :

a) Nếu $12 > 25$ thì nước sôi ở 100^0C.

b) Nếu $3 < 4$ thì $5 < 1$.

c) Nếu $1 + 1 = 2$ thì $1 + 3 = 5$.

Giải

a) Mệnh đề đúng, vì $12 > 25$ sai.

b) Mệnh đề sai, vì $\begin{cases} \bullet\ 3 < 4 : \text{đúng} \\ \bullet\ 5 < 1 : \text{sai} \end{cases}$

c) Mệnh đề sai, vì $\begin{cases} \bullet\ 1 + 1 = 2 : \text{đúng} \\ \bullet\ 1 + 3 = 5 : \text{sai} \end{cases}$

Bài 3. Hãy chứng minh :

a) $\overline{\overline{p}} \equiv p$

b) $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$

c) $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \Rightarrow r \equiv (p \vee q) \vee r$

d) $p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

Giải

a) Bảng chân trị :

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$
Đ	S	Đ
S	Đ	S

Nhìn trên bảng chân trị, ta thấy ngay : $\overline{\overline{p}} \equiv p$.

b) Bảng chân trị :

p	q	$\overline{p}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$
Đ	Đ	S	Đ	S	S
Đ	S	Đ	S	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S
S	S	Đ	Đ	S	S

Nhìn vào bảng chân trị ta thấy ngay $\overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}$.

c) Bảng chân trị :

p	q	r	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$p \vee q$	$(\overline{p} \wedge \overline{q}) \Rightarrow r$	$(p \vee q) \vee r$
Đ	Đ	Đ	S	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	Đ	S	S	S	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
Đ	S	S	S	Đ	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	Đ	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	Đ	S	Đ	S	S	Đ	Đ	Đ
S	S	Đ	Đ	Đ	Đ	S	Đ	Đ
S	S	S	Đ	Đ	Đ	S	S	S

Nhìn trên bảng chân trị ta thấy ngay $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \Rightarrow r \equiv (p \vee q) \vee r$.

d) Lập bảng chân trị tương tự như câu b) ta sẽ có ngay kết quả :

$$p \Rightarrow q \equiv \overline{q} \Rightarrow \overline{p} .$$

Bài 4. Cho $p \Rightarrow q$ đúng. Chứng minh rằng : $[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ đúng.

Giải

- Nếu p đúng :

  Từ giả thiết $(p \Rightarrow q)$ đúng nên q đúng.

  Suy ra $(p \Rightarrow r)$ và $(q \Rightarrow r)$ có cùng chân trị.

  Vì vậy : $[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ đúng.

- Nếu p sai thì $(p \Rightarrow r)$ đúng. Vì vậy $[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ đúng.

  Tóm lại : Nếu $(p \Rightarrow q)$ đúng thì $[(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ đúng.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho biết chân trị các mệnh đề sau :

a) $(\sqrt{3} < 1) \vee (\pi > 2)$

b) $(a^3 + b^3 \geq ab(a + b)) \wedge (a + b \geq 0)$

c) $(1 + 2 + 3 < 5) \Rightarrow (1 + 2 + 3 > 5)$

d) Nếu $3 + 4 = 12$ thì $3 + 2 = 6$

e) Nếu $5 > 10$ thì $1 > 2008$

f) $\left(\frac{12}{5} > \frac{11}{6}\right) \vee (-5^2 > 0)$.

2. Định $x \in R$ để các hàm mệnh đề sau đây đúng :

a) "nếu $x^2 - 5x + 4 = 0$ thì $x = 1$ hay $x = 4$"

b) "nếu $x = 3$ thì $x > \frac{3}{2}$"

c) "$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 3)$"

d) "nếu $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$ thì $x > 0$".

3. Tìm chân trị các mệnh đề sau và lấy phủ định của nó :

a) $\forall x \in R, x^4 + x^2 + 1 \geq 0$

b) $\exists x \in Z, x^2 - 5x - 7 = 0$

c) $\forall n \in N, n^3 - n \ \vdots\ 3$

d) $\exists n \in N, n^2 + 1 \not\vdots\ 2006$.

4. Hãy phủ định mỗi mệnh đề sau :

p : Tất cả học sinh lớp 10 tin đều nam.

q : Tồn tại một tam giác có 2 góc tù

r : Tồn tại một tứ giác có 3 góc tù.

5. Hãy chỉ ra mệnh đề luôn đúng trong các mệnh đề sau :

a) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

c) $p \Rightarrow (\overline{q} \Rightarrow p)$

d) $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$.

6. Chứng minh rằng các khẳng định sau luôn đúng :

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) $q \vee (p \wedge q) \equiv p$

c) $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

d) $(\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge r$.

7. Chứng minh rằng :

a) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$

$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

(Luật đối ngẫu De Morgen)

b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

(Tính giao hoán)

c) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(Tính kết hợp)

d) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(Tính phân phối).

DẠNG 2 : DÙNG PHÉP PHẢN CHỨNG

Để chứng minh một bài toán bằng phương pháp phản chứng ta thực hiện như sau :

- Giả sử kết luận sai.
- Ta chứng minh dẫn đến điều vô lí !

Vậy kết luận phải đúng.

Bài 1.

Cho $\begin{cases} a + b + c > 0 \\ ab + bc + ca > 0 \\ abc > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $a, b, c > 0$.

Giải

Giả sử ngược lại, trong 3 số a, b, c có ít nhất một số ≤ 0. Vì a, b, c vai trò như nhau, nên ta có thể xem $a \le 0$.

Khi đó : $abc > 0 \Rightarrow a < 0, bc < 0$

$\Rightarrow a(b + c) = ab + ac > -bc > 0$

$\Rightarrow a(b + c) > 0$

$\Rightarrow b + c < 0$ (vì chứng minh trên có $a < 0$)

$\Rightarrow a + b + c < 0 \Rightarrow$ vô lí

Vậy $a, b, c > 0$.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu $n \in N$ không phải là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ.

Giải

Ta giả sử $\sqrt{n}$ là số hữu tỉ. Khi đó :

$\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ (với p, q ∈ N, p > q và p, q nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow \quad n = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 \vdots q^2$$

Hơn nữa, ta viết q và p dưới dạng : $q = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}$

$$p = a_1^{\beta_1}.a_2^{\beta_1}...a_n^{\beta_n}$$

(với $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in N$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên tố thỏa $2 \le a_1 < a_2 < ... < a_n$)

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} q^2 = a_1^{2\alpha_1}.a_2^{2\alpha_2}...a_n^{2\alpha_n} \\ p^2 = a_1^{2\beta_1}.a_2^{2\beta_2}...a_n^{2\beta_n} \end{cases}$$

Do $p^2 \vdots q^2 \quad \Rightarrow \quad \beta_i \ge \alpha_i, \quad \forall i = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = a_1^{2(\beta_1-\alpha_1)}.a_2^{2(\beta_2-\alpha_2)}...a_n^{2(\beta_n-\alpha_n)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q} = a_1^{\beta_1-\alpha_1}.a_2^{\beta_2-\alpha_2}...a_n^{\beta_n-\alpha_n}$$

$\Rightarrow \quad p \vdots q \quad \Rightarrow$ n là số chính phương

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết

Vậy : $\sqrt{n}$ là số vô tỉ.

Bài 3. Cho a, b, c ∈ (0; 1). Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai :

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Giải

Giả sử tất cả các bất đẳng thức trên đều đúng, tức là :

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Suy ra : $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad a(1-1)b(1-b)c(1-c) > \frac{1}{64}$$

Điều này vô lí, vì $\begin{cases} 0 < a(1-a) \le \dfrac{1}{4} \\ 0 < b(1-b) \le \dfrac{1}{4} \\ 0 < c(1-c) \le \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$ (Đpcm).

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Chứng minh rằng : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và $\sqrt{2008} + \sqrt{2007}$ là các số vô tỉ.

2. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Chứng minh rằng ABCD nội tiếp.

3. Chứng minh rằng phương trình :

$15x^2 - 7y^2 = 9$ không có nghiệm $x, y \in \mathbb{Z}$.

4. Chứng minh rằng : $n^2 + 3n + 5 \not\vdots\ 121, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Cho $a + b + c > 0$. Chứng minh rằng trong 3 bất đẳng thức sau, có ít nhất một bất đẳng thức đúng :

$a^3 \ge abc + 1001, \quad b^3 \ge abc + 1006, \quad c^3 \ge abc - 2007.$

6. Cho $\begin{cases} abc < 0 \\ ab + bc + ca > 0 \\ \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $a, b, c < 0$.

7. Chứng minh rằng không tồn tại các số a, b, c thỏa mãn : $\begin{cases} |a| < |b-c| \\ |b| < |c-a| \\ |c| < |a-b| \end{cases}$

DẠNG 3 : DÙNG PHÉP QUY NẠP

Muốn chứng minh mệnh đề p(n) phụ thuộc vào $n \in \mathbb{N}$, đúng $\forall n \ge n_0$ (n_0 hằng số $\in \mathbb{N}$), ta thực hiện 3 bước sau :

- Bước 1 : $n = n_0$: Chứng minh $p(n_0)$ đúng.
- Bước 2 : $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \ge n_0$) : Giả sử p(k) đúng.
- Bước 3 : $n = k + 1$: Chứng minh p(k + 1) đúng.

Nguyên lí quy nạp cho phép ta kết luận p(n) đúng $\forall n \ge n_0$. Đặc biệt khi $n_0 = 1$ thì ta kết luận p(n) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Bài 1. Chứng minh $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in N$ (1)

Từ đó suy ra kết quả của $\sum = 2^2 + 4^2 + ... + 2004^2$.

Giải

- $n = 1$: Ta có $1^2 = \frac{1.(1+2)(2.1+1)}{6}$ (đẳng thức luôn đúng).
- $n = k$ $(k \in N)$: Giả sử (1) đúng, tức là có:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

- $n = k + 1$: Ta có:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

(Do giả thiết quy nạp (bước 2))

$$= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$\Rightarrow$ Công thức (1) đúng, khi $n = k + 1$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng.

Từ đó ta có: $\sum = 2^2 + 4^2 + ... + 2004^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + ... + 1002^2)$

$$= 4.\frac{1002.(1002+1)(2004+1)}{6} = 1343358020.$$

Bài 2. Cho $a \geq -1$, $n \in N$. Chứng minh rằng:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{(Bất đẳng thức Bernoulli)}$$

Từ đó suy ra: $2003^{2006} + 2004^{2006} < 2005^{2006}$.

Giải

- $n = 1$: BĐT luôn đúng.
- $n = k$ $(k \in N)$: Giả sử bất đẳng thức đúng, tức là:

$$(1 + a)^k \geq 1 + ka \quad (1)$$

- $n = k + 1$: $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)(1 + a)^k$

$$\geq (1 + a)(1 + ka) \quad \left(\text{Do} : \begin{cases} (1) \\ 1 + a \geq 0 \end{cases} \right)$$

$$\geq 1 + (k + 1)a + ka^2$$

$$\geq 1 + (k + 1)a$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức đúng khi $n = k + 1$.

ậy theo nguyên lí quy nạp : $(1 + a)^n \geq 1 + na, \forall n \in N$

Do đó : $\left(\frac{2005}{2004}\right)^{2006} = \left(1 + \frac{1}{2004}\right)^{2006} > 1 + \frac{2006}{2004} > 2$

$\Rightarrow \quad 2005^{2006} > 2.2004^{2006} > 2003^{2006} + 2004^{2006}$

Vậy : $2003^{2006} + 2004^{2006} < 2005^{2006}$.

Bài 3. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 1$ $(n \geq 2)$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + ... + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \quad (1)$$

Giải

- $n = 2$:

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \quad (2)$$

$\Leftrightarrow \quad (1 + \sqrt{a_1a_2})(2 + a_1 + a_2) \geq 2(1 + a_1 + a_2 + a_1a_2)$

$\Leftrightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + \sqrt{a_1a_2}.(2 + a_1 + a_2) \geq 2(1 + a_1 + a_2 + a_1a_2)$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a_1a_2}(2 + a_1 + a_2) \geq 2 + a_1 + a_2 + 2a_1a_2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{a_1a_2}(a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1a_2}) - (a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1a_2}) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{a_1a_2} - 1)(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ (luôn đúng)

$\Rightarrow \quad (1)$ đúng với $n = 2$.

- $n = k$ $(2 \leq k \in N)$:

Giả sử (1) đúng, tức là :

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + ... \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}} \quad (3)$$

- $n = k + 1$:

Ta có : $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{1+a_i} + \frac{k-1}{1+\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}}$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1+a_i} + \left(\frac{1}{1+a_k} + \frac{k-1}{1+\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}} \right)$$

$$\geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}} + \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_{k+1}.(a_1a_2...a_{k+1})^{\frac{k-1}{k+1}}}} \quad \text{(Do (3))}$$

$$\geq \frac{2k}{1+\sqrt[2k]{a_1a_2...a_{k+1}.(a_1a_2...a_{k+1})^{\frac{k-1}{k+1}}}}$$

$$\geq \frac{2k}{1+\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{1+a_i} \geq \frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{a_1a_2...a_{k+1}}}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp (1) đúng.

Chú ý :

- Qua phép chứng minh trên ta dễ dàng "bắt chước" để chứng minh bất đẳng thức Cauchy tổng quát :

"Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ $(n \geq 2)$ thì luôn có : $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ "

(Dành cho bạn đọc)

- Nếu $0 < a_1, a_2, ..., a_n \leq 1$ $(n \geq 2)$

thì $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_2}$, ..., $b_n = \frac{1}{a_n} \geq 1$

do đó ta có ngay $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+b_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}}$ (do (1))

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+a_i} \geq \frac{n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$$

đây là một bất đẳng thức (có chiều ngược lại so với (1)).

- Khi n = 3, ta có :

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\frac{1}{1+a_3}\geq\frac{3}{1+\sqrt[3]{a_1a_2a_3}}$$

hay $$\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\geq\frac{3}{1+abc},\quad \forall a, b, c\geq 1$$

Đây là đề thi Đại học Tổng hợp – Tp. Hồ Chí Minh năm 1994 (nay là Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh).

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Hãy chứng minh rằng :

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\quad \forall n\in N$$

Từ đó suy ra tổng $\sum = 1^3+3^3+\ldots+2007^3$.

2. Hãy chứng minh rằng :

a) $n^4+6n^3+11n^2+6n \,\vdots\, 24, \forall n\in N$

b) $6^{2n}+3^{n+2}+3^n \,\vdots\, 11, \forall n\in N$

c) $4^n+15n-1 \,\vdots\, 9, \forall n\in N$.

3. Cho ΔABC vuông tại A có BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng :

$$b^{2n}+c^{2n}\leq a^{2n}, \forall n\in N.$$

(Học viện Quân y Hà Nội năm 2000)

4. Cho $2\leq n\in Z$. Chứng minh rằng :

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

5. Hãy chứng minh rằng :

$$(x^2+y^2)^n\geq 2^nx^ny^n+(x^n-y^n)^2, \forall x, y>0,\quad \forall n\in N$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

6. Cho a + b = 2008. Chứng minh rằng :

$$a^n+b^n\geq 2.1004^n, \forall n\in N.$$

§2. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

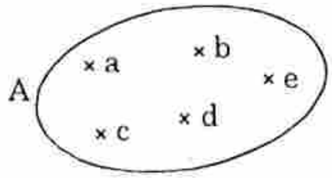
1. Tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm của Toán học, nó không được định nghĩa từ các khái niệm khác, mà chỉ mô tả bằng các ví dụ :
  + Tập hợp các số tự nhiên, các số nguyên, các số hữu tỉ.
  + Tập hợp các học sinh lớp 10 Sinh của Trường phổ thông Năng khiếu – Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh năm học 2006 – 2007.
- Các vật tạo nên một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp.
  + Nếu x là phần tử của tập hợp A thì ta viết $x \in A$ (đọc là : x thuộc A).
  + Nếu x không là phần tử của tập hợp A thì ta viết $x \notin A$ (đọc là : x không thuộc A).
- Để diễn tả một tập hợp, ta có 3 cách :
  + Cách 1 : Liệt kê các phần tử :

    Ví dụ : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
  + Cách 2 : Tính chất các phần tử :

    Ví dụ : $A = \{x \in N \ / \ x^3 + x^2 + x + 1 \leq 1001\}$
  + Cách 3 : Để dễ hình dung một tập hợp, ta thường biểu diễn tập hợp bởi đường cong kín, mỗi phần tử của tập hợp được đặc trưng bởi một điểm nằm trong đường cong kín đó (gọi là giản đồ Venn).

    Ví dụ :



- Một tập không chứa phần tử nào cả gọi là tập hợp rỗng và kí hiệu $\varnothing$

  Ví dụ : $A = \{x \in Q \ / \ x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0\}$ là tập hợp rỗng.
- Một tập hợp A mà mọi phần tử của nó đều là những phần tử của B thì ta gọi A là một tập hợp con của tập hợp B, kí hiệu $A \subset B$ (đọc là : A chứa trong B) hay $B \supset A$ (đọc là : B chứa A)

  Ví dụ : $\varnothing \subset A$, $A \subset A$

  $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Lớp tất cả các tập hợp con của tập A là một tập hợp kí hiệu $\mathscr{P}(A)$ và gọi là tập các phần tử của A.

- Cho A và B là các tập hợp thỏa $A \subset B$ và $B \subset A$ ta gọi A, B là hai tập bằng nhau và kí hiệu $A = B$.

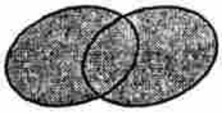
2. Các phép toán tập hợp

2.1. Phép hợp

Hợp của hai tập A và B là một tập hợp, kí hiệu $A \cup B$ xác định bởi :

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ hay } x \in B\}$$

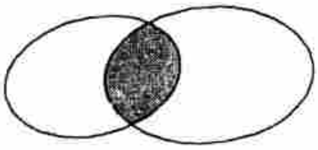
$A \cup B$



2.2. Phép giao

Giao của hai tập A và B là một tập hợp, kí hiệu $A \cap B$ xác định bởi :

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ và } x \in B\}$$

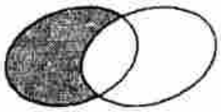


$A \cap B$

2.3. Hiệu của tập hợp A và B là một tập hợp kí hiệu A\B xác định bởi :

$$A \backslash B = \{x \,/\, x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

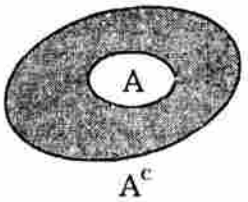
A\B



2.4. Phần bù

Cho $A \subset X$. Tập hợp X\A được gọi là phần bù của A trong X, kí hiệu

C_XA hay A^C.



X

A^c

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1 : XÁC ĐỊNH MỘT TẬP HỢP

Bài 1. Cho $A = \{-2; -1; 1; 2; 4; 7\}$; $B = \{x \in Z \,/\, x^2 < 15\}$

Xác định $A \cap B$, $A \cup B$, A\B.

Giải

Ta có : $B = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3\}$

Vì $x \in Z$, $x^2 < 15 \Rightarrow x^2 \in \{1; 4; 9\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3\}$

Suy ra : $A \cap B = \{\pm 1; \pm 2\}$

$A \cup B = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; 4; 7\}$

$A \backslash B = \{4; 7\}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1611

Bài 2. Viết phần bù trong R của các tập sau :

$$A = \{x \in R \ / \ 2006 \le x \le 2008\}$$

$$B = \{x \in R \ / \ x \ge 2005\}$$

$$C = \{x \in R \ / \ |x| \ge 1001\}.$$

Giải

$$A^C = \{x \in R \ / \ x < 2006 \text{ hay } x > 2008\}$$

$$= \{x \in R \ / \ x < 2006\} \cup \{x \in R \ / \ x > 2008\}$$

$$B^C = \{x \in R \ / \ x < 2005\}$$

$$C^C = \{x \in R \ / \ |x| < 1001\}.$$

Bài 3. Xác định các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê :

$$A = \{x \in Z \ / \ (4x^2 + 4x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$$

$$B = \{x \in Q \ / \ (x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6})(x^2 - 9) = 0\}$$

Giải

Ta có :

- $(4x^2 + 4x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2(x - 2)(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \notin Z \\ x = 2 \in Z \\ x = 3 \in Z \end{array}\right. \Rightarrow A = \{2; 3\}$$

- $(x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6})(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \notin Q \\ x = \sqrt{3} \notin Q \\ x = \pm 3 \in Q \end{array}\right. \Rightarrow B = \{\pm 3\}.$$

Bài 4. Cho A = {a; b; c} (a > b > c). Xác định $\mathscr{P}(A)$.

Giải

Ta có : $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{b, c\}, \{c, a\}; A\}$.

Chú ý : Nếu A có n phần tử thì $\mathscr{P}(A)$ có 2^n phần tử.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Xem xét các mệnh đề sau đây đúng hay sai :

a) $2006 \notin Z$ **b)** $\sqrt{2} \in Q$

c) $2 \in Q$ **d)** $1,71 \in Q$

e) $\pi \in R$ **f)** $\{1; 2; 3\} \subset Q$.

2. Hãy xác định các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê các phần tử :

a) $A = \{2007 + \sqrt{2}.(-1)^{n+3} / n \in N\}$

b) $B = \{x \in Z / (x^2 - 1)(x^2 - 3)(x^2 - 5) = 0\}$

c) $C = \left\{x \in R / \dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 1)x} = 0\right\}$

3. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Hãy liệt kê ra :

a) Các tập hợp con của A chứa 2 phần tử

b) Các tập hợp con của A chứa 3 phần tử

c) Các tập hợp của của A chứa 4 phần tử

d) Tất cả các tập hợp con của A.

4. Cho $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 4; 7\}$, $C = \{1; -2; 5; 8\}$, $D = \{3; 5; 7\}$.

Hãy xác định các tập hợp sau :

a) $(A \cap C) \cup B$ **b)** $(A \setminus C) \cap B$

c) $(C \setminus D) \setminus A$ **d)** $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$

e) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D)$.

5. Cho $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$, $A \setminus B = \{-1; -2\}$, $B \setminus A = \{4; 5\}$

Xác định A và B.

6. Viết lại các tập hợp sau đây bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng của các phần tử :

a) $A = \{3; 9; 27; 81; 243\}$ **b)** $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

c) $C = \left\{1; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{27}; ...\right\}$ **d)** $D = \{2; 4; 8; 16; 32; ...\}$.

7. Cho $A = \{a; b; c; d\}$ $(a > b > c > d)$.

Xác định $\mathscr{P}(A)$.

DẠNG 2 : CHỨNG MINH CÁC TẬP HỢP $A \subset B$, $C = D$.

Bài 1. Chứng minh rằng : $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

(Trong đó $\varnothing \neq A, B \subset X$).

Giải

$$\forall x \in X\setminus(A \cap B) \Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A \cap B$$
$$\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow x \in X\setminus A \vee x \in X\setminus B$$
$$\Leftrightarrow x \in (X\setminus A) \cup (X\setminus B)$$

Vậy : $X\setminus(A \cap B) = (X\setminus A) \cup (X\setminus B)$.

Bài 2.

a) Cho $A = \{x \in N / x \vdots 3\}$, $B = \{x \in N / x \vdots 6\}$. Chứng minh $B \subset A$.

b) Cho $A = \{2x / x \in N\}$, $B = \{8x / x \in N\}$. Chứng minh $B \subset A$.

Giải

a) $\forall x \in B \Rightarrow x \in N$ và $x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 3 \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow B \subset A$.

b) $\forall x \in B \Rightarrow y = 8x, x \in N$

$= 2(4x), x \in N \Rightarrow y \in A \Rightarrow B \subset A$.

Bài 3. Cho $A, B, C \subset X$. Chứng minh rằng :

nếu $A \cup C \subset A \cup B$ và $A \cap B \subset A \cap B$ thì $C \subset B$.

Giải

$\forall x \in C \Rightarrow x \in A \cup C \subset A \cup B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

nếu $x \in A \Rightarrow x \in A \cap C \subset A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in B$

Như vậy $\forall x \in C \Rightarrow x \in B \Rightarrow C \subset B$.

Bài 4. Cho $A, B \subset X$. Chứng minh rằng :

a) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ **b)** $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$

Cho một ví dụ để có $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \neq \mathscr{P}(A \cup B)$.

Giải

a) $\forall C \in \mathscr{P}(A \cap B) \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

$\Leftrightarrow C \subset A \wedge C \subset B$

$\Leftrightarrow C \in \mathscr{P}(A) \wedge C \in \mathscr{P}(B)$

$\Leftrightarrow C \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$

$\Rightarrow \mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.

b) $\forall C \in \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \Rightarrow C \in \mathscr{P}(A) \vee C \in \mathscr{P}(B)$

$\Rightarrow C \subset A \vee C \subset B$

$\Rightarrow C \subset A \cup B$

$\Rightarrow C \in \mathscr{P}(A \cup B)$

$\Rightarrow \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$

Hơn nữa : Chọn $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ thì :

- $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing; A\}$, $\mathscr{P}(B) = \{\varnothing; B\}$

$\Rightarrow \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\varnothing; A; B\}$.

- $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\} = \{\varnothing; A; B; \{1; 2\}\}$

$\Rightarrow \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \neq \mathscr{P}(A \cup B)$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $A, B \subset X$. Chứng minh rằng : Nếu $A \subset B$ thì $C_XA \supset C_XB$.

2. Cho A, B, C là ba tập hợp. Chứng minh rằng :

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

3. Chứng minh rằng :

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

4. Cho $A = \{x \in R \ / \ x^2 - 5x + 6 = 0\}$

$B = \{x \in R \ / \ x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$

$C = \{x \in R \ / \ (x - 5)(x^3 - 5x^2 + 6x) = 0\}$

Chứng minh rằng : $A \subset B \subset C$.

5. Đặt $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (với $A, B, C \subset X$)

Chứng minh rằng :

a) $A \Delta B = B \Delta A$

b) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

d) $A \Delta A = \varnothing$

e) $A \Delta \varnothing = A$.

6. Chứng minh rằng :

a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$

b) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$.

Chương II. HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Ánh xạ

- Cho X, Y là các tập hợp khác rỗng. Ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử $x \in X$ có duy nhất một phần tử $y \in Y$.
  Kí hiệu : $f : X \to Y$

  $$x \mapsto y = f(x)$$

  + $y = f(x)$ gọi là ảnh của x bởi f
  + $x \in X$ để có $f(x) = y \in Y$ gọi là tạo ảnh của y bởi f
  + X gọi là tập nguồn và Y gọi là tập đích của f
- Cho $A \subset X$, $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ gọi là tập ảnh của A bởi f.

  Đặc biệt : A = X thì f(x) gọi tập ảnh của f và kí hiệu Imf
- Cho $B \subset Y$, $f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$ gọi là tập nghịch ảnh của B bởi f.

  Đặc biệt :

  + Khi $B = \{y\}$ thì $f^{-1}(\{y\})$ còn được kí hiệu $f^{-1}(y)$ và gọi là ảnh ngược của y bởi f
  + Khi B = Y thì $f^{-1}(Y) = X$.
- Ánh xạ : $f : X \to Y$ gọi là đơn ánh

  $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_2 \in X$ và $x_1 \neq x_2$ $\Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2))$

  $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_2 \in X$ và $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $(x_1 = x_2)$.
- Ánh xạ : $f : X \to Y$ gọi là toàn ánh

  $\Leftrightarrow$ Imf = Y

  $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y, \exists x \in X$ sao cho : $y = f(x)$.
- Ánh xạ : $f : X \to Y$ gọi là song ánh

  $\Leftrightarrow$ f đơn ánh và toàn ánh

  $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y, \exists! x \in X$ sao cho : $y = f(x)$.
- Khi $f : X \to Y$ song ánh thì f có ánh xạ ngược là :

  $f^{-1} : Y \to X$

  $y \mapsto f^{-1}(y) = x$ nếu $y = f(x)$ (với $x \in X, y \in Y$).

- Cho $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$

$x \mapsto f(x)$ $\quad$ $y \mapsto g(y)$

thì ánh xạ hợp : $g_0f : X \to Z$

$$x \mapsto g_0f(x) = g[f(x)].$$

2. Hàm số

- Ánh xạ : $f : X \to Y$ có X, Y $\subset$ R gọi là hàm số.

$$x \mapsto y = f(x)$$

+ $x \in X$: gọi là biến
+ $y = f(x)$ gọi là giá trị của hàm số tại $x \in X$
+ X : gọi là tập (miền) xác định của f
+ $\text{Imf} = f(X) = \{f(x) / x \in X\}$ gọi là tập (miền) giá trị của f

- *Một số tính chất (có thể có) của hàm số :*

Cho hàm số f có miền xác định là D

+ f gọi là hàm số chẵn $\Leftrightarrow \left[\forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}\right]$

+ f gọi là hàm số lẻ $\Leftrightarrow \left[\forall x \in D \Rightarrow \begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}\right]$

+ f gọi là hàm tăng (đồng biến) trên D

$\Leftrightarrow \quad [\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)]$

+ f gọi là hạm giảm (nghịch biến) trên D

$\Leftrightarrow \quad [\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)].$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1 : • XÉT TÍNH ĐƠN ÁNH, TOÀN ÁNH VÀ SONG ÁNH
• TÌM HÀM NGƯỢC VÀ HÀM HỢP
• TÌM TẬP ẢNH VÀ TẬP NGHỊCH ẢNH

Bài 1. Cho hàm số $f : R \to R$

$$x \mapsto f = f(x) = 5x - x^2$$

a) Tính f(0), f(1), f(x + 1), $f(x^2)$.

b) Xác định các tập hợp : $A = \{x \in R / f(x) = 6\}$;

$B = \{x \in Z / f(x) = 0\}$.

Giải

a) $f(0) = 0$

$f(1) = 4$

$f(x + 1) = 5(x + 1) - (x + 1)^2 = (x + 1)(4 - x)$

$f(x^2) = 5x^2 - x^4$.

b) Ta có : • $f(x) = 6 \Leftrightarrow 5x - x^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{2; 3\} \Rightarrow A = \{2; 3\}$.

• $B = \{0; 5\}$.

Bài 2. Xét tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh của các ánh xạ sau :

a) $f : R \to R$

$x \mapsto y = f(x) = x^2 + 4x$

b) $f : [10; +\infty) \to R$

$x \mapsto y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$

Giải

a) • Chọn $x_1 = 0, x_2 = -4 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ và $f(x_1) = f(x_2) = 0$

$\Rightarrow$ f không dơn ánh

• Chọn $y = -10$ thì $f(x) = y \ (x \in R) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 6 = 0 \Rightarrow$ Vô nghiệm

$\Rightarrow$ f không toàn ánh.

b) • $\forall x_1, x_2 \in [10; +\infty) : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1 + 2 = -x_2^2 + 2x_2 + 2$

$\Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + 2(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(2 - x_1 - x_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$ (vì $2 - x_1 - x_2 < 0$)

$\Rightarrow$ f đơn ánh.

• Chọn $y = 4$ thì $f(x) = y \ (x \in R) \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm)

$\Rightarrow$ f không toàn ánh.

Bài 3. Chứng minh rằng :

a) $f : R \to [1; +\infty)$

$x \mapsto f(x) = x^4 + 1$ toàn ánh nhưng không đơn ánh.

b) $f : R \to R$

$x \mapsto y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ là song ánh.

Tìm ánh xạ ngược của f.

Giải

a) • $\forall y \in [1; +\infty)$, chọn $x = \sqrt[4]{y-1}$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^4 + 1 = y$

$\Rightarrow$ f toàn ánh.

• Chọn $x_1 = -1; x_2 = 1$ $\Rightarrow$ $x_1 \neq x_2$ và $f(x_1) = f(x_2) = 2$

$\Rightarrow$ f đơn ánh.

Vậy : f toàn ánh nhưng không đơn ánh.

b) $\forall y \in R$, ta có : $f(x) = y$ $(x \in R$ $\Leftrightarrow$ $x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = y$

$\Leftrightarrow$ $(x + 1)^3 = y - 2$

$\Leftrightarrow$ $x = -1 + \sqrt[3]{y-2}$.

Vậy f song ánh và $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x-2}$.

Bài 4. Chứng minh rằng : $f : R \setminus \{-2\} \to R \setminus \{3\}$

$$x \mapsto y = f(x) = \frac{3x+1}{x+2} \text{ song ánh.}$$

Tìm ánh xạ ngược của f.

Giải

$\forall y \in R \setminus \{3\}$, ta có : $f(x) = y$ $(x \in R \setminus \{-2\})$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 3x + 1 = y.x + 2y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{3-y} \in R \setminus \{-2\}.$$

Vậy f song ánh và $f^{-1} :$ $R \setminus \{3\} \to R \setminus \{-2\}$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3-x}.$$

Bài 5. Cho : $f : R \to R$ $g : R \setminus \{\pm 1\} \to R$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad x \mapsto g(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

Tìm g_0f.

Giải

Rõ ràng : $f : R \to R \setminus \{\pm 1\}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Suy ra : $g_0f(x) = g[f(x)] = \dfrac{\dfrac{x}{1+|x|}}{1-\dfrac{|x|}{1+|x|}} = x$.

Bài 5. Cho $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Hãy xác định $A = \{x \in R \;/\; f(x+1) = 0\}$.

Giải

Ta có : $f(x+1) = 0 \;(x \in R) \Leftrightarrow (x+1)^2 - 5(x+1) + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \Rightarrow A = \{1; 2\}$.

Bài 6.

a) Cho : $f : R \to R$

$x \mapsto f(x) = x^2$

Tính $f(\{1; 2\})$, $f((-\infty; 0])$, $f([0; +\infty))$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$.

b) Cho : $g : R \to R$

$x \mapsto g(x) = [x]$ (phần nguyên của x)

Tính $g([0; +\infty))$, $g([0; 1))$, $g^{-1}(\{0; 1\})$, $g^{-1}([0; 1])$, $g^{-1}(Z^+)$.

Giải

a)
- $f(\{1; 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{1; 4\}$
- $f((-\infty; 0]) = \{f(x) \;/\; x \in (-\infty; 0]\} = \{x^2 \;/\; x \in (-\infty; 0]\} = [0; +\infty)$
- $f([0; +\infty)) = \{f(x) \;/\; x \in [0; +\infty)\} = \{x^2 \;/\; x \in [0; +\infty)\} = [0; +\infty)$
- $f^{-1}(1) = \{x \in R \;/\; f(x) = 1\} = \{x \in R \;/\; x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$
- $f^{-1}(0) = \{x \in R \;/\; f(x) = 0\} = \{x \in R \;/\; x^2 = 0\} = \{0\}$

b)
- $g([0; +\infty)) = \{g(x) \;/\; x \in [0; +\infty)\} = \{[x] \;/\; x \in [0; +\infty)\}$

  $= Z^+ \; (= \{x \in Z \;/\; x \geq 0\})$
- $g([0; 1)) = \{g(x) \;/\; x \in [0; 1)\} = \{[x] \;/\; x \in [0; 1)\} = \{0\}$
- $g^{-1}(\{0; 1\}) = \{x \in R \;/\; g(x) \in \{0; 1\}\} = \{x \in R \;/\; [x] \in \{0; 1\}\} = [0; 2)$

  (vì : • $[x] = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ • $[x] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$)
- $g^{-1}([0; 1]) = \{x \in R \;/\; g(x) \in [0; 1]\} = \{x \in R \;/\; [x] \in [0; 1]\} = [0; 2)$

  (vì : $0 \leq [x] \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$)
- $g^{-1}(Z^+) = \{x \in R \;/\; g(x) \in Z^+\} = \{x \in R \;/\; [x] \in Z^+\} = [0; +\infty)$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Với mỗi ánh xạ : $f : R \to R$ dưới đây, hãy xác định xem nó có đơn ánh, toàn ánh hay song ánh không ? Trong trường hợp f là song ánh, hãy tìm ánh xạ ngược của nó.

a) $f(x) = 2x + 6$ **b)** $f(x) = x^2 - x + 1$

c) $f(x) = x^4 + x^2$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x| + 1}$.

2. Cho $f, g : R \to R$ xác định bởi : $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 - x + 1$.

Tìm f_0g, f_0f, g_0f, g_0g.

3. Cho $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Chứng minh rằng f là song ánh và xác định ánh xạ ngược của nó.

4. Cho các ánh xạ $f, g : R \to R$. Xác định bởi : $f(x) = ax + b$

và $g(x) = x^2 + x + 1$.

Giải sử : $g_0f(x) = 3x^2 + 3x + 1, \forall x \in R$. Hãy xác định a, b.

5. Cho $f : R \to R$

$$x \mapsto f(x) = x^2 + 6x$$ Hãy tìm :

a) $f(0), f(1), f(-1), f(2), f(-2)$ **b)** $f^{-1}(1), f^{-1}(2)$

c) $\text{Im}f$, $f(0; +\infty)$, $f([3; +\infty))$ **d)** $f^{-1}([0; +\infty))$, $f^{-1}((-\infty; 0])$, $f^{-1}([5; +\infty))$.

6. Cho $\varnothing \neq A, B \subset R$. Đặt : $\chi_A : R \to R$

$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^C \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x), \forall x \in R$

b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x), \forall x \in R$

c) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x).(1 - \chi_B(x)), \forall x \in R$.

7. Cho : $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Chứng minh rằng :

a) Nếu g_0f đơn ánh thì f đơn ánh.

b) Nếu g_0f toàn ánh thì g toàn ánh.

c) Nếu f và g song ánh thì g_0f song ánh.

DẠNG 2 : • TÌM TẬP (MIỀN) XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ
• XÉT TÍNH CHẴN, LẺ VÀ ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{2x-1}{x^2+x+3}$ b) $y = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$

c) $y = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$ d) $y = \dfrac{|2+x|-|2-x|}{|2-x|+|2+x|}$.

Giải

a) Ta có : $x^2 + x + 3 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} > 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow$ Miền xác định của f là D = R.

b) Ta có : $x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Miền xác định của y là $D = R \setminus \{0; 2\}$.

c) Miền xác định của y là $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow$ Miền xác định của y là D = [–2; 2].

d) Ta có : $(|2-x| + |2+x|)^2 = (2-x)^2 + (2+x)^2 + 2|4-x^2|$

$= 8 + 2x^2 + 2|4 - x^2| > 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow |2-x| + |2+x| > 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow$ Miền xác định của y là D = R.

Bài 2. Định m để hàm số sau xác định trên [0; 1] :

a) $y = \sqrt{2m-x} - 7\sqrt{x+3m-5}$ b) $y = \dfrac{4x}{3x-m-1} + \dfrac{7x-m}{\sqrt{2x+m-1}}$

Giải

a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \leq 2m \\ x \geq 5 - 3m \end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên [0; 1] khi và chỉ khi :

$$5 - 3m \leq 0 \leq 1 \leq 2m \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq m \\ \dfrac{5}{3} \leq m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \dfrac{5}{3}$$

Vậy : $m \geq \frac{5}{3}$ là giá trị cần tìm.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x > \frac{1-m}{2} \\ x \neq \frac{1+m}{3} \end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên [0; 1] khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{1-m}{2} < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{1+m}{3} < 0 \\ \frac{1+m}{3} > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy : m > 2 là giá trị cần tìm.

Bài 3. Xét tính chẵn và lẻ của các hàm số sau :

a) $y = f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3}{x^2 - 1}$ **b)** $y = f(x) = \frac{|2x+1| + |2x-2|}{|2x+1| - |2x-1|}$

c) $y = f(x) = x^2 - 4x$ **d)** $y = f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 3}$

Giải

a) • Miền xác định của f là $D = R \setminus \{\pm 1\}$

• $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = \frac{2x^4 - x^2 + 3}{x^2 - 2} = f(x)$

$\Rightarrow$ f là hàm số chẵn.

b) • Ta có $|2x+1| - |2x-1| \neq 0 \Leftrightarrow |2x-1| \neq |2x-1|$

$\Leftrightarrow (2x+1)^2 \neq (2x-1)^2$

$\Leftrightarrow x \neq 0$

$\Rightarrow$ Miền xác định của f là $D = R \setminus \{0\}$

• Khi đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = \frac{|-2x+1| + |-2x-1|}{|-2x+1| - |-2x-1|} = \frac{|2x-1| + |2x+1|}{|2x-1| - |2x+1|} = -\frac{|2x+1| + |2x-1|}{|2x+1| - |2x-1|}$$

$= -f(x) \Rightarrow$ f là hàm số lẻ.

c) • Miền xác định của f là D = R

• Nhưng : $\begin{cases} f(1) = -3 \\ f(-1) = 5 \end{cases}$ nên $f(1) \neq \pm f(-2)$

Vậy f không là hàm chẵn, cũng không là hàm lẻ.

d) • Miền xác định của f là $D = R \setminus \{-3\}$

• Ta có $3 \in D$ và $-3 \notin D$

$\Rightarrow$ f không là hàm chẵn, không là hàm lẻ.

Bài 4. Cho f, g : $R \to R$ thỏa :

$$f(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \quad (\forall x, y \in R) \qquad (1)$$

$$g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \quad (\forall x, y \in R) \qquad (2)$$

trong đó f là hàm chẵn, $f(0) = 0$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$.

a) Chứng minh rằng : g là hàm chẵn và $g(0) = 1$.

b) Chứng minh rằng : $f^2(x) + g^2(x) = 1$

$$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x) \quad (\forall x \in R)$$

$$g(3x) = 4g^3(x) - 3g(x).$$

Giải

a) Trong (1) cho $y = -x \neq 0$, ta được :

$$f(0) = f(x)g(-x) + g(x).f(-x) \quad \Rightarrow \quad 0 = f(x)[g(-x) - g(x)]$$

$$\Rightarrow \quad g(-x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad g(-x) = g(x), \forall x \neq 0$$

Hơn nữa : $f(1) = f(1 + 0) = f(1)g(0) = g(1).f(0)$ (cũng do (1))

$\Rightarrow$ $f(1) = f(1)g(0)$ (vì $f(0) = 0$)

$\Rightarrow$ $g(0) = 1$ (vì $f(1) \neq 0$)

Như vậy : $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in R$ và $g(0) = 1$

Hay g là hàm chẵn và $g(0) = 1$.

b) • Trong (2) cho $y = -x \in R$, ta được :

$$g(0) = g(x + (-x)) = g(x)g(-x) - f(x).f(-x) = g^2(x) + f^2(x)$$

$\Rightarrow$ $f^2(x) + g^2(x) = 1$

• $\forall x \in R$, ta có :

$$f(2x) = f(x + x) = f(x)g(x) + g(x)f(x) = 2f(x)g(x)$$

$$g(2x) = g(x + x) = g(x)g(x) - f(x)f(x)$$
$$= g^2(x) - f^2(x)$$
$$= 2g^2(x) - 1 = 1 - 2f^2(x).$$

Suy ra : $f(3x) = f(x + 2x) = f(x)g(2x) + g(x)f(2x)$

$$= f(x)(1 - 2f^2(x)) + g(x).2f(x)g(x)$$
$$= 3f(x) - 4f^3(x)$$
$$g(3x) = g(x + 2x) = g(x)g(2x) - f(x)f(2x)$$
$$= g(x)(2g^2(x) - 1) - 2(1 - g(x))g(x)$$
$$= 4g^3(x) - 3g(x).$$

Bài 5. Xét tính đơn điệu của các hàm :

a) $f(x) = x^2 + 2x + 10$ trên $(-1; +\infty)$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ trên $(1; +\infty)$

c) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2007$ trên R

Giải

a) $\forall x_1 > x_2 > -1$, ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 + 2x_1 - (x_2^2 + 2x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)$$
$$= (x_1 - x_2)\underbrace{(x_1 + x_2 + 2)}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$ $\Rightarrow$ f tăng trên $(-1; +\infty)$.

b) $\forall x_1 > x_2 > 1$, ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(2 + \frac{3}{x_1 - 1}\right) - \left(2 + \frac{3}{x_2 - 1}\right) = \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$$

$\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ $\Rightarrow$ f giảm trên $(1; +\infty)$.

c) $\forall x_1, x_2 \in R$, $x_1 > x_2$

$\Rightarrow$ $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 - x_2^3) + (x_1^2 - x_2^2) + (x_1 - x_2)$

$$= (x_1 - x_2)[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + x_1 + x_2 + 1]$$
$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)[(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 2x_1 + 1) + (x_2^2 + 2x_2 + 1)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)[\underbrace{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2}_{>0}] > 0$$

$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \quad \Rightarrow \quad$ f tăng trên R.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Tìm miền xác định của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{|x-1|-1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

c) $y = \dfrac{|x-2| + |x+3|}{|x-2| - |x+3|}$ **d)** $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{|x^2 - 2| + |x^2 - 4x + 3|}$

e) $y = \dfrac{x+1}{x^3 + 64}$ **f)** $y = \dfrac{x-7}{\sqrt{9 + 7 + x^4}}$.

2. Đặt a để các hàm số sau xác định trên $[1; +\infty)$:

a) $y = \sqrt{x + 2a - 5} - 7.\sqrt{2x + 2a - 1}$

b) $y = 7\sqrt{3x - 2a + 1} - \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 3a + 2}$.

3. Khảo sát tính chẵn và lẻ của các hàm số sau :

a) $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **b)** $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x| - 1}$

c) $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 6} - \sqrt{x^2 - 4x + 6}$

d) $y = f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 2007$

e) $y = f(x) = 2\sqrt{(x+1)^2} + 3\sqrt{(x-1)^2}$

f) $y = f(x) = \begin{cases} x^3 + 8, & x \le -2 \\ 0, & -2 < x < 2 \\ x^3 - 8, & x \ge 2 \end{cases}$

4. Cho hàm số $y = x^4 - m(m-1)x^3 + x^2 + mx + m^2 + 1$

Định m để f là hàm số chẵn.

5. Cho hàm số : $f : R \to R$ thỏa :

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \end{cases} \quad (\forall x, y \in R)$$

Chứng minh rằng f là hàm số chẵn.

6. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau :

a) $y = f(x) = 3x^2 - x + 1$ trên $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$

b) $y = f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$ trên $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

c) $y = f(x) = \dfrac{7}{3x^2+2}$ trên R

d) $y = f(x) = 3x^3 - x^2 + 10x + 9$ trên R.

7. Định m để các hàm số :

a) $y = f(x) = (m^2 - 1)x^3 + 3(m+1)x^2 + 9x$ luôn tăng trên R.

b) $y = f(x) = \dfrac{x+m}{x-m}$ luôn giảm trên $(-\infty; 1)$.

8. Định m để các hàm số :

a) $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{1}{3}m^3 - 2m^2 + 3m$ tăng trên $[1, +\infty)$.

b) $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 10}{-x+1} + m$ giảm trên $(-\infty, 1)$.

Chương III.

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Phương trình bậc nhất có dạng $ax + b = 0$. Ta có các trường hợp :

- $a \neq 0$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
- $a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm
- $a = b = 0$: phương trình có nghiệm x tùy ý $\in R$.

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận phương trình : $(m^2 + 2)x = x - 2m$ (m tham số).

Giải

Phương trình $\Leftrightarrow (m^2 + 1)x = -2m \Leftrightarrow x = -\dfrac{2m}{m^2 + 1}$

Đây là nghiệm duy nhất cần tìm.

Bài 2. Giải và biện luận phương trình : $\dfrac{x+m}{x-1} = \dfrac{x+3}{x-2}$.

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow (x + m)(x - 2) = (x + 3)(x - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + (m - 2)x - 2m = x^2 + 2x - 3$

$\Leftrightarrow (m - 4)x = 2m - 3$

- $m = 4$: phương trình vô nghiệm
- $m \neq 4$: phương trình $\Leftrightarrow x = \dfrac{2m - 3}{m - 4}$

Do điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \dfrac{2m-3}{m+1} \neq 1 \\ \dfrac{2m-3}{m-4} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \neq m-4 \\ 2m-3 \neq 2m-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad m \neq -1$

Vậy : • $m \in \{4; -1\}$: phương trình vô nghiệm

• $m \in R \setminus \{4; -1\}$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2m-3}{m-4}$

Bài 3. Cho phương trình $m^2x = 9x + m^2 - 4m + 3$ (1

a) Tìm m để phương trình (1) có tập nghiệm là R.

b) Tìm $m \in Z$ để phương trình (1) có duy nhất nghiệm và nghiệm đó là số nguyên.

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (m^2 - 9)x = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3)$

Phương trình (1) có tập nghiệm là R

$\Leftrightarrow \quad m^2 - 9 = (m-1)(m-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3$

b) Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \quad m^2 - 9 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq \pm 3$

Khi đó nghiệm của phương trình : $x = \dfrac{m-1}{m+3} = 1 - \dfrac{4}{m+3}$

Do đó $x \in Z \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4}{m+3} \in Z \quad \Leftrightarrow \quad m + 3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

$\Leftrightarrow \quad m \in \{-7; -5; -4; -2; -1; 1\}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $(3m-2)^2x = 2x - m$ **b)** $m^2(x-2) = m - 3x$

c) $\dfrac{x+m}{x+1} = 2 + \dfrac{x-3}{x}$ **d)** $\dfrac{x+3}{x+m} - \dfrac{x+2}{x-2} = 0$

e) $(b^2+1)x - (a^2+4)x = a(a^2 - b^2) - 5x$.

2. Định m để phương trình :

a) $(2m-1)^2x + 1 - m = (7m+1)x$ có nghiệm duy nhất.

b) $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1}$ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó lớn hơn $\frac{1}{2}$.

c) $m^3(1 + x) = 3m - 1$ có tập nghiệm là R.

3. Định m để mỗi phương trình sau vô nghiệm :

a) $m(x - m) - (4 + m)x = m^2 + 4x$

b) $(x + 1)m^2 + (m + 2)x = 10$

c) $\frac{x+m}{x-1} - \frac{x-3}{x+1} = 0$

d) $\frac{m(x+2)}{6} + \frac{x-m}{3} = \frac{x-1}{2}$.

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

- Tính các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

- Biện luận :

+ $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

+ $\begin{cases} 0 = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 > 0 \end{cases}$: Hệ vô nghiệm.

+ $D = D_x = D_y = 0$: Thông thường ta thế tham số vào hệ để suy ra kết quả.

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận hệ phương trình : $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

Giải

Tính các định thức : $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m = m(m-1).$$

Do đó :

+ Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1 \Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1} \end{cases}$$

+ Nếu $m = -1$ thì $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hệ vô nghiệm.

+ Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ Hệ trở thành :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (t \in R)$$

Vậy : • $m \neq \pm 1$: Hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1} \end{cases}$

• $m = 1$: Hệ có vô số nghiệm : $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \quad (t \in R)$

• $m = -1$: Hệ vô nghiệm.

Bài 2. Tìm các giá trị b sao cho với mọi $a \in R$ thì hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1-a)y = b^2 \end{cases}$$

(Đại học Công đoàn)

Giải

Ta có : $D = 1 - a - 2a^2$

$$D \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 + a - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

thì hệ có nghiệm duy nhất.

- Khi $a = -1$, hệ trở thành : $\begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \text{Hệ có nghiệm} \quad \Leftrightarrow \quad b = -b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

- Khi $a = \dfrac{1}{2}$, hệ trở thành : $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = 2b^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \text{Hệ có nghiệm} \quad \Leftrightarrow \quad b = 2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm với mọi } a \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

Bài 3. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m+3)y = 2m + 3 \end{cases}$

Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x \geq y$?

(Đại học An ninh)

Giải

Ta có : $D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 + & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 3m - 4 = (m - 1)(m + 4)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m^2 + 4 & 4 \\ 2m + 3 & m + 3 \end{vmatrix} = (m^2 + 4)(m + 2) - 4(2m + 3)$$

$$= m^3 + 3m^2 + 4m + 12 - 8m - 12$$

$$= m^3 + 3m^2 - 4m = m(m^2 + 3m - 4) = m(m - 1)(m + 4)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m^2+4 \\ 1 & 2m+3 \end{vmatrix} = (2m+3)m - m^2 - 4$$

$$= m^2 + 3m - 4 = (m-1)(m+4).$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ $D \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -4 \end{cases}$

và lúc đó : $x \geq y \Leftrightarrow \dfrac{D_x}{D} \leq \dfrac{D_y}{D} \Leftrightarrow m \geq 1$

Vậy : m > 1 là giá trị cần tìm.

Bài 4. Định m để hệ : $\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \\ x + y = m & (3) \end{cases}$ có nghiệm.

Giải

Xét hệ gồm (2) và (3) : $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

có $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$ $(t \in R)$

(luôn thỏa (1))

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì hệ gồm (2) và (3) có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{1-m^2}{1-m} = 1 + m \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m-1}{1-m} = -1 \end{cases}$$

nghiệm này thỏa (1) $\Leftrightarrow m(1+m) - 1 = 1$

$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & \text{(loại)} \\ m = -2 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m = -2$

Tóm lại hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải và biện luận theo m các hệ sau :

a) $\begin{cases} mx + y = m^3 \\ x + my = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} my + 4x = 4 \\ 4y + mx = 4 \end{cases}$

2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m :

a) $\begin{cases} (m+2)x - 2my = m \\ (2m+1)x + y = 2m - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2mx - 3y = m \\ x + y = 1 - m \end{cases}$

3. Cho hệ $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$

a) Tìm b để với mọi $a \in R$, ta luôn tìm được $c \in R$ để hệ có nghiệm.

b) Tìm b để tồn tại $c \in R$ sao cho hệ có nghiệm với mọi $a \in R$.

4. Cho a, b, c là 3 cạnh của ΔABC.

Chứng minh rằng hệ : $\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$$x = \cos A,\ y = \cos B,\ z = \cos C.$$

5. Giả sử hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

6. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $P = (x + 2y + 3)^2 + (4x + my + 6)^2$ theo m.

b) $Q = (x + my - 2)^2 + (4x + 2(m-2)y - 1)^2$

(Câu b) trích đề thi ĐHQG Hà Nội khối D năm 2001)

7. Chứng minh rằng : nếu các phương trình $x^3 + ax + b = 0$

và $x^3 + cx + d = 0$

có ít nhất một nghiệm chung thì :

$$(ad - bc)(a - c)^2 = (b - d)^3.$$

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất phương trình bậc nhất có dạng :

- $ax + b > 0$ (Dạng 1).
- $ax + b < 0$ (Dạng 2).
- $ax + b \geq 0$ (Dạng 3).
- $ax + b \leq 0$ (Dạng 4).

2. Bảng xét dấu của $f(x) = ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ (với $a \neq 0$)

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f(x)	Dấu của (–a)		Dấu của a

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải các bất phương trình :

a) $4x - 7 > 0$ **b)** $-5x + 8 > 0$

c) $9x - 10 \leq 0$ **d)** $(x - 1)^2 + 4 \leq x^2 + 3x + 10$.

Giải

a) $4x - 7 > 0 \Leftrightarrow 4x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{4}$

b) $-5x + 8 > 0 \Leftrightarrow 5x < 8 \Leftrightarrow x < \frac{8}{5}$

c) $9x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow 9x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq \frac{10}{9}$

d) $(x - 1)^2 + 4 \leq x^2 + 3x + 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4 \leq x^2 + 3x + 10$

$\Leftrightarrow 5x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Bài 2. Giải các bất phương trình :

a) $(3x - 1)(2 - x) < 0$ **b)** $(5 - 2x)(4x + 1)(x - 2) \geq 0$

c) $x - 3 \geq \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$ **d)** $x(3x + 7)(x + 1)^3(x - 8)^2 < 0$.

Giải

a) Ta có : • $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

• $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
3x – 1		–	0	+	|	+	
2 – x		+	|	+	0	–	
(3x – 1)(2 – x)		–	0	+	0	–	

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{3} \\ x > 2 \end{array}\right.$

b) Ta có : • $5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

• $4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

• $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
5 – 2x		+	|	+	|	+	0	–	
4x + 1		–	0	+	|	+	|	+	
x – 2		–	|	–	0	+	|	+	
(5 – 2x)(4x + 1)(x – 2)		+	0	–	0	+	0	–	

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x \le -\frac{1}{4} \\ 2 \le x \le \frac{5}{2} \end{array}\right.$

c) Ta có : $x - 3 \ge \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 1) - (x^2 + 2x + 5)}{x + 1} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x - 3) - (x^2 + 2x + 5)}{x + 1} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{(4x+8)}{x+1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{x+1} \leq 0$$

Ta có : • $x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

• $x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x+1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $-2 \leq x < -1$.

d) Ta có : • $3x + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{3}$

• $(x + 1)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

• $(x - 8)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		-1		0		8		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x + 7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x + 1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x - 8)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
$x(3x + 7)(x + 1)^3(x - 8)^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x < -\frac{7}{3} \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$

Bài 3. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $\frac{m-3}{2m}x > \frac{1-x}{2} - \frac{x-1}{m} \quad (m \neq 0)$

b) $\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{4} \quad (a \neq 2).$

Giải

a) BPT $\Leftrightarrow \dfrac{m-3}{2m}x + \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-1}{m} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m-3)x + m(x-1) + 2(x-1)}{2m} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2m-1)x - (m+2)}{2m} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2m-1}{2m}x > \dfrac{m+2}{2m}$

Xét dấu của $f(m) = \dfrac{2m-1}{2m}$

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2m − 1		−		−	0	+	
2m		−	0	+		+	
f(m)		+	‖	−	0	+	

Khi đó :

- nếu $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \dfrac{m+2}{2m-1}$
- nếu $0 < m < \dfrac{1}{2}$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \dfrac{m+2}{2m-1}$
- nếu $m = \dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình vô nghiệm.

b) BPT $\Leftrightarrow \dfrac{ax}{a-2} - \dfrac{4x-4+6x+9}{12} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{ax}{a-2} - \dfrac{10x-5}{12} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{[12a - 10(a-2)]x}{a-2} < \dfrac{5}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2(a+10)}{12(a-2)}x < \dfrac{5}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+10}{a-2}x < \dfrac{5}{2}$

Xét dấu của $f(a) = \dfrac{a+10}{a-2}$

a	$-\infty$		−10		2		$+\infty$
a + 10		−	0	+		+	
a − 2		−		−	0	+	
f(a)		+	0	−	‖	+	

Khi đó :

- Nếu $\left[\begin{array}{l} a < -10 \\ a > 2 \end{array}\right.$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \dfrac{5(a-2)}{2(a+10)}$

- Nếu $-10 < a < 2$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > \dfrac{5(a-2)}{2(a+10)}$

- Nếu $a = -10$: thì nghiệm của bất phương trình là x tùy ý $\in R$.

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau đây đượ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 2]$

$$\frac{mx+m}{(m+1)x-m+2} > 0.$$

Giải

Giả sử : $\dfrac{mx+m}{(m+1)x-m+2} > 0, \forall x \in [0; 2]$

$$\Rightarrow \quad \frac{m.0+m}{(m+1).0-m+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2-m} > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 < m < 2$$ (Bạn đọc tự kiểm tra

Ngược lại $0 < m < 2$ thì :

- $mx + m > 0, \forall x \in [0; 2]$
- $(m + 1)x \geq 0 > m - 2, \forall x \in [0; 2]$

$\Rightarrow (m + 1)x - m + 2 > 0, \forall x \in [0; 2]$

$\Rightarrow \dfrac{mx+m}{(m+1)x-m+2} > 0, \forall x \in [0; 2]$

Vậy : $0 < m < 2$ là kết quả cần tìm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các bất phương trình :

a) $(3x + 7)(x + 2) \leq 0$

b) $\dfrac{(3x+3)(x+2)}{2x-2} \geq 0$

c) $x + \dfrac{1}{x} \leq 2$

d) $x + \dfrac{9}{x+2} \geq 4$

e) $\dfrac{(x+2)^5(x-1)^2(x-3)^4}{x(x^2-9)} \leq 0.$

2. Giải và biện luận theo m các bất phương trình :

a) $m^2(x - 1) < m + 4mx$ **b)** $x + 1 > \frac{b}{a}x + \frac{a}{b}$ (a, b > 0)

c) $(x - m)(-x + m + 1) \le 0$ **d)** $\frac{2x + m + 2}{x - 2} < 0$.

3. Định m để bất phương trình :

a) $m(x + mx) \le 1$ có tập nghiệm là R

b) $(m - 2)x \ge 2(mx - 1) + 2m$ vô nghiệm

c) $m(x + 1) \le (m - 1)x - 2)$ vô nghiệm.

4. Cho a, b, c thỏa điều kiện abc < 0. Hãy giải bất phương trình :

$$\frac{x - a}{bc} + \frac{x - b}{ca} + \frac{x - c}{ab} < 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

5. Định m để hai phương trình sau tương đương :

$$(m - 1)x - m + 3 < 0$$

$$(m + 1)x - m + 2 > 0$$

(Cao đẳng Sư phạm)

§4. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN SỐ

Bài 1. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 3x + 2 \ge x - 2 \\ 4x - 5 < 5 - 6x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{2x + 3}{x - 1} \ge 0 & (1) \\ \frac{(x + 2)(2x - 4)}{7x - 7} \le 0 & (2) \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge -4 \\ 10x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < 1.$

b) • Giải (1) :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
2x + 3		−	0	+		+	
x − 1		−		−	0	+	
$\frac{2x + 3}{x - 1}$		+	0	−	‖	+	

Suy ra : (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{3}{2} \\ x > 1 \end{array}\right.$

- Giải (2) :

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x - 4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$7x - 7$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x+2)(2x-4)}{7x-7}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

Suy ra : (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 1 < x \le 2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{3}{2} \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 1 < x \le 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{3}{2} \\ 1 < x \le 2 \end{array}\right.$

Bài 2. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} (x-1)(x+8) < 0 & (1) \\ m^2x + 1 > 3m + 5 & (2) \end{cases}$$

Giải

- (1) $\Leftrightarrow$ $-8 < x < 1$ (Bạn đọc tự kiểm tra)
- Giải (2) :

(2) $\Leftrightarrow$ $m^2x > 3m + 4$

* $m = 0$: (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ Hệ đã cho vô nghiệm.

* $m \ne 0$: (2) $\Leftrightarrow$ $x > \dfrac{3m+4}{m^2}$

Trong trường hợp này hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 0 \\ \dfrac{3m+4}{m^2} \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 \le 0 \\ m \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le m \le 4 \\ m \ne 0 \end{cases}$$

Vậy $-1 \le m \le 4$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3. Định m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases}(m-1)x - m \le 2x + 1\\ 2mx \le 2m - x\end{cases}$$

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}(m-3)x \le m+1\\ (2m+1)x \le 2m\end{cases}$

Suy ra hệ này có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{m-3} = \frac{2m}{2m+1} \Leftrightarrow (m+1)(2m+1) = 2m(m-3)$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + m + 2m + 1 = 2m^2 - 6m$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{9} \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$$

- nếu m = 3 thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}0 \le 4\\ 7x \le 6\end{cases}$ có vô số nghiệm
- nếu $m = -\frac{1}{2}$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{7}{2}x \le \frac{1}{2}\\ 0 \le -1\end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $m = -\frac{1}{9}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases}2x + \frac{1}{x} > x\\ 12x > 0\end{cases}$

b) $\begin{cases}\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}\\ \frac{3x+6}{4} - 1 < \frac{x-7}{3} + 9x\end{cases}$

c) $\begin{cases}9x + 7 \ge x - 1\\ \frac{(x+7)(9x-1)}{x^2 - 7x + 6} > 0\end{cases}$

2. Định m để các hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $\begin{cases}\frac{-x+2}{2x-7} \ge 0\\ 4x + 7 \le 7m - 1\end{cases}$

b) $\begin{cases}(3+m)x \le 1\\ 2x + 2 - m \le 0\end{cases}$

3. Giải và biện luận theo a các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases}(x-1)(x-2a)\le 0\\(x+2)(x+a)\le 0\end{cases}$ b) $(a^2-4)x \le a-2 \le (a^2-2a-30)x$.

4. Định m để các hệ bất phương trình vô nghiệm :

a) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1}\le 0\\8x+1>m\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x-3)(x+1)\le 0\\m^2x+1>2m(3m-2)x\end{cases}$

5. Định m để các hệ bất phương trình sau có nghiệm :

a) $\begin{cases}3x-2>-5x+6\\3x-m<2\end{cases}$ b) $\begin{cases}2mx-2=3m\\\dfrac{x-10}{x-5}<0\end{cases}$

6. Định m để 2 bất phương trình sau là tương đương :

$$(m^2-1)x-m^2+3>0 \quad (1$$

$$(m^2+1)x>m^2-2 \quad (2$$

§5. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Cho tam thức bậc hai : $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

1. Phương trình bậc hai : $f(x) = 0$ (1)

- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ (với $b' = \frac{b}{2}$))
- Biện luận :
  + Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) thì phương trình (1) vô nghiệm
  + Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì phương trình (1) có nghiệm kép

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \left(\text{hoặc} \quad x = -\frac{b'}{a}\right)$$

  + Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(\text{hoặc} \quad x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right).$$

- Đặc biệt :

  + Nếu a + b + c = 0 thì phương trình (1) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

  + Nếu a − b + c = 0 thì phương trình (1) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

- Định lí Viet :

  + Phần thuận : nếu x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = S \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = P \end{cases}$$

  + Phần đảo : nếu x_1 và x_2 thỏa $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$ thì chúng là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - S.x + P = 0$

- Nếu phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 thì

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \forall x \in R$$

- Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$

  + $f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

  + $f(x) < 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

  + [$f(x) \geq 0, \forall x \in R$ và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$] $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

  + [$f(x) \leq 0, \forall x \in R$ và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$] $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$

  + Nếu $\Delta > 0$ thì dấu của f(x) là :

x	$-\infty$		x_2		x_2		$+\infty$
f(x)		Dấu của a	0	Dấu của (−a)	0	Dấu của a	

[với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1)]

- So sánh một số (hoặc 2 số) với nghiệm của phương trình bậc hai f(x) = 0 :

  + Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

  + Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm $x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ \Delta > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

  + Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 < \beta < x_2 \\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta \end{array}\right.$

  $$\Leftrightarrow \quad f(\alpha).f(\beta) < 0 \quad (\text{với } \alpha < \beta).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1 : CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

- Giải và biện luận theo tham số
- Chứng minh phương trình có nghiệm
- Xét dấu của nghiệm
- Sử dụng định lí Viet

Bài 1. Giải và biện luận phương trình : $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1)

Giải

- Nếu m = 0 thì (1) $\Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$

- Nếu $m \neq 0$, ta có $\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3)$

  $= m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m$

  $= 4 - m$

  + nếu m > 4 : Phương trình vô nghiệm

  + nếu m = 4 : Phương trình có nghiệm kép $x = -\dfrac{b'}{a} = \dfrac{m-2}{m} = \dfrac{1}{2}$

  + nếu m < 4 : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

  $$x_{1,2} = \frac{m - 2 \pm \sqrt{4-m}}{m}$$

- m = 4 : Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$

- m > 4 : Phương trình vô nghiệm.

Bài 2. Định m để phương trình :

$$2x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + 4m + 3 = 0 \quad (1)$$

có 2 nghiệm phân biệt mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

(Đề thi học kì II của lớp 10 Toán – Tin Trường phổ thông Năng khiếu – ĐHQG. TP.HCM năm 2003)

Giải

Yêu cầu phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) > 0 \\ (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ 5x_1x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ 2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ 2(m+1)^2 = \dfrac{9}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ 4m^2 + 8m + 4 = 9m^2 + 36m + 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ 5m^2 + 28m + 23 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\dfrac{23}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = -\frac{23}{5}.$$

Bài 3. Định m để phương trình : $x^2 - mx + m + 7 = 0$

có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Giải

Ta có : $S = m$, $P = m + 7$

Do đó : $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 10$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 14 = 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \quad (\Rightarrow \Delta = m^2 - 4m - 28 > 0) \\ m = 6 \quad (\Rightarrow \Delta = m^2 - 4m - 28 < 0) \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

a) Tính S_1, S_2.

b) Chứng minh rằng : $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$

c) Tính S_6.

Giải

a) Ta có : $S_1 = x_1 + x_2 = 1$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 1 + 2 = 3$$

b) Ta có : $\begin{cases} x_1^2 - x_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = x_1 + 1 \\ x_2^2 = x_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} = x_1^{n+1} + x_1^n \\ x_2^{n+2} = x_2^{n+1} + x_2^n \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + (x_1^n + x_2^n)$$

$$\Rightarrow \quad S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$$

c) Ta có : $S_6 = S_5 + S_4 = (S_4 + S_3) + S_4 = 2S_4 + S_3 = 2(S_3 + S_2) + S_3$

$$= 3S_3 + 2S_2 = 3(S_2 + S_1) + 2S_2 = 5S_2 + 3S_1 = 15 + 3 = 18$$

Vậy : $S_6 = 18$.

Bài 5. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình : $x^2 - 2x + a = 0 \quad (a \neq 0)$

Đặt $y_i = x_i^2 + ax_i + a^2 \quad (i = 1; 2)$

Chứng minh rằng : $\sum = a\left(\dfrac{y_1}{x_1^3} + \dfrac{y_2}{x_2^3}\right) - 2\left(\dfrac{y_1}{x_1^2} + \dfrac{y_2}{x_2^2}\right) + \left(\dfrac{y_1}{x_1} + \dfrac{y_2}{x_2}\right)$

có giá trị độc lập đối với a.

Giải

Ta có : $x_i^2 - 2x_i + a = 0 \quad (i = 1; 2)$

$$\Rightarrow \quad a = 2x_1 - x_1^2 = 2x_2 - x_2^2$$

$$\Rightarrow \quad a\left(\frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3}\right) = y_1.\frac{a}{x_1^3} + y_2.\frac{a}{x_2^3} = y_1.\frac{2x_1 - x_1^2}{x_1^3} + y_2.\frac{2x_2 - x_2^2}{x_2^3}$$

$$= y_1\left(\frac{2}{x_1^2} - \frac{1}{x_1}\right) + y_2\left(\frac{2}{x_2^2} - \frac{1}{x_2}\right) = -\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right) + 2\left(\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sum = a\left(\frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3}\right) - 2\left(\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2}\right) + \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right) = 0.$$

Bài 6. Cho phương trình : $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$

Định m để phương trình :

a) có 2 nghiệm trái dấu

b) có 2 nghiệm dương phân biệt

c) có đúng một nghiệm âm.

Giải

a) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P = \dfrac{m-3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)m < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 3 \qquad (?)$$

b) Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m(m-3) > 0 \\ S = \dfrac{2(m-2)}{m} > 0 \\ P = \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

(Bạn đọc tự kiểm tra) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 3 < m < 4 \end{array}\right.$

c) • Nếu $m = 0$: phương trình trở thành : $4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4} > 0$

$\Rightarrow m = 0$ không nhận được.

• Nếu $m \neq 0$

+ Nếu $\Delta = 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a} = \frac{m-2}{m} = \frac{1}{2} > 0$$

$\Rightarrow m = 4$ không nhận được

+ Phương trình có đúng một nghiệm âm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 < 0 = x_2 \end{array}\right.$ (với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai trên).

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} S = \dfrac{2(m-2)}{m} < 0 \\ P = \dfrac{m-3}{m} = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ \begin{cases} 0 < m < 2 \\ m = 3 \end{cases} \end{array}\right. \text{(Bạn đọc tự kiểm tra)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < m < 3$$

Vậy : $0 < m < 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài 7. Chứng minh rằng : $p - c = \dfrac{a+b-c}{2}$ là nghiệm của phương trình bậc hai : $x^2 - ax + S.\tan\dfrac{A}{2} = 0$

trong đó : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ và $S = S_{\Delta ABC}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần IV)

Giải

Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A)$

$$= (b-c)^2 + 4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$= (b-c)^2 + 4S.\tan\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 4S.\tan\frac{A}{2} = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

$$= \left(a - \frac{a+b-c}{2}\right)(a+b-c)$$

$$= 4[a-(p-c)](p-c) = 4[a(p-c)-(p-c)^2]$$

$$\Rightarrow \quad (p-c)^2 - a(p-c) + S.\text{tg}\frac{A}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(Đpcm)}.$$

Bài 8. Cho phương trình : $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$

a) Tìm m để phương trình trên có nghiệm x_1, x_2.

b) Tìm maxP, $P = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

Giải

a) Điều kiện $\Delta = (m+1)^2 - 2(m^2+4m+3) = -(m^2+6m+5) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 + 6m + 5 = (m+1)(m+5) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq m \leq -1 \quad (?)$$

b) Với $-5 \le m \le -1$, ta có :

$$P = \left| \frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 2(m+1) \right| = \frac{1}{2} \left| m^2 + 8m + 7 \right|$$

Hơn nữa : • $m^2 + 8m + 7 = \underbrace{(m+1)}_{\le 0}\underbrace{(m+7)}_{> 0} \le 0$

• $m^2 + 8m + 7 = (m+4)^2 - 9 \ge -9$

$$\Rightarrow \quad 0 \le -(m^2 + 8m + 7) \le 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \le P \le \frac{9}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $m = -4 \in [-5; -1]$

Vậy : $\max P = \dfrac{9}{2}$.

Bài 9. Chứng minh rằng : Điều kiện cần và đủ để phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \ne 0)$$

có một nghiệm bằng k lần nghiệm kia là :

$$k.b^2 - (k+1)^2\cdot \qquad (k \in R \setminus \{0; -1\}).$$

Giải

$(\Rightarrow)$ Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 0 = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = (k^2 + 1)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2)$$

$$= (k^2 + 2k + 1)x_1x_2 - k(x_1 + x_2)^2$$

$$= (k+1)^2 \frac{c}{a} - k\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad kb^2 - (k+1)^2ac = 0$$

$(\Leftarrow)$ Ta có : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= \frac{(k+1)^2}{k}ac - 4ac \qquad \left(\text{vì } b^2 = \frac{(k+1)^2}{k}ac \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ac}{k} \ge 0\right)$$

$$= (k-1)^2 \frac{ac}{k} \ge 0$$

Vậy phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1, x_2.

Hơn nữa : $(x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = (k+1)^2x_1x_2 - k(x_1 + x_2)^2$

$$= (k+1)^2.\frac{c}{a} - k\frac{b^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}[(k+1)^2ac - kb^2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{(Đpcm)}.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải và biện luận theo m các phương trình :

a) $(m-1)x^2 - 3(m-1)x + 2 = 0$

b) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

c) $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4m = 0$

2. Giải và biện luận theo a, b các phương trình :

a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$ **b)** $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$.

3. Cho phương trình : $x^2 - (m-3)x + (m-1)(m-4) = 0$ (1)

Định m để phương trình :

a) có nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m

b) có 2 nghiệm dương

c) có 2 nghiệm âm

d) có 2 nghiệm trái dấu

e) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^5 + x_2^5 = 0$

g) Chứng minh rằng :

Nếu (1) có một nghiệm dương x_1 thì phương trình

$$(m-1)(m-4)x^2 - (m-3)x + 1 = 0$$

cũng có một nghiệm dương x_2 và $x_1 + x_2 \geq 2$.

4. Cho phương trình : $mx^2 - 2(m-3)x + m + 3 = 0$. Định m để :

a) Phương trình có nghiệm kép và tính nghiệm kép này.

b) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa :

$$x_1^2 + x_2^2 - 5(x_1 + x_2) = 2.$$

5. Cho hai phương trình bậc hai với tham số m :

$$x^2 + x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + (m + 1)x + 1 = 0 \quad (2)$$

a) Định m để hai phương trình này có nghiệm chung.

b) Định m để hai phương trình này tương đương.

6. Chứng minh rằng : Nếu $a.\alpha \geq 8014$ thì ít nhất một trong 2 phương trình :

$$x^2 + ax + 2003 = 0$$

$$x^2 + \alpha x + 2004 = 0$$ có nghiệm.

7. Đặt : $\begin{cases} a = \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \\ b = \dfrac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} \\ c = -\alpha\beta\gamma \end{cases}$

Chứng minh rằng các phương trình : $ax^2 + 2bx + c = 0$

$x^2 + 2ax + b = 0$ đều có nghiệm.

8. Cho a > b > c. Chứng minh rằng các phương trình sau đều có nghiệm :

a) $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b} + \dfrac{1}{x - c} = 0$

b) $a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$.

9. Tìm điều kiện của a và b để phương trình :

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 - x^2 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Lúc này hãy chứng minh :

$$f(x_1).f(x_2) \geq 0 \quad (\text{với } f(x) = (x + a)^3 + (x + b)^3 - x^3).$$

10. Cho ΔABC. Đặt : $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = m$ (1)

$\cos A + \cos B + \cos C = n$ (2)

a) Hãy viết (1) thành phương trình bậc hai theo $x = \cos C$.

b) Hãy viết (2) thành phương trình bậc hai theo $t = \sin\dfrac{A}{2}$.

c) Từ đó, hãy chứng minh :

- $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C \geq \dfrac{3}{4}$
- $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \leq \dfrac{9}{4}$
- $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$
- $0 < \sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{1}{8}$.

DẠNG 2 : BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1. Giải các bất phương trình bậc hai :

a) $7(x-1)(-x^2+4x-3)(x^2-4)(6x^2+5) \le 0$

b) $\dfrac{x+5}{2x-1} + \dfrac{2x-1}{x+5} > 2$

c) $\dfrac{6(3x+4)}{x^2-3x+5} < 0$ **d)** $x < \dfrac{x+1}{x-1}$.

Giải

a) Ta có : • $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

• $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 + 4x - 3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x^2 + 5$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
Vế trái BPT		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} -2 \le x \le 2 \\ x \ge 3 \end{array}\right.$.

b) Bất phương trình tương đương :

$$\frac{(x+5)^2 + (2x-1)^2 - 2(x+5)(2x-1)}{(2x-1)(x+5)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+5-2x+1)^2}{(2x-1)(x+5)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(6-x)^2}{(2x-1)(x+5)} > 0 \qquad (1)$$

Ta có : • $(6-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

• $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

• $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$ | -5 | $\frac{1}{2}$ | 6 | $+\infty$			
$(6-x)^2$	+	+	+	+ 0 +
$2x-1$	−	− 0	+	+
$x+5$	− 0	+	+	+
Vế trái BPT (1)	+	−	+	+ 0 +

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $\left[\begin{array}{l} x < -5 \\ \frac{1}{2} < x < 6 \\ x > 6 \end{array}\right.$.

c) Ta có : • $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

• $x^2 - 3x + 5 > 0, \quad \forall x \in R,$ vì $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = -11 < 0 \end{cases}$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$ | $-\frac{4}{3}$ | $+\infty$	
$3x+4$	− 0	+
x^2-3x+4	+	+
Vế trái BPT	− 0	+

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < -\frac{4}{3}$.

d) Bất phương trình $x < \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-x-1}{x-1} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{x-1} < 0$$

Ta có : • $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

Suy ra bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x - 1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x < 1 - \sqrt{2} \\ 1 < x < 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bài 2. Giải và biện luận bất phương trình :

$$(m + 1)\, x^2 + (m - 2)\, x + m - 2 < 0 \qquad (1)$$

Giải

Ta xét các trường hợp :

- $m = -1$: BPT (1) $\Leftrightarrow$ $-3x - 3 < 0$ $\Rightarrow$ $x > -1$
- $m \neq -1$: $\Delta = (m - 2)^2 - 4(m + 1)(m + 2) = -3(m - 2)(m + 2)$

Bảng xét dấu :

m	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

Do đó :

\+ $m < -2$: $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} m + 1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad (m + 1)x^2 + (m - 2)x + m - 2 < 0, \quad \forall x \in R$$

\+ $m = -2$: BPT (1) $\Leftrightarrow$ $-x^2 - 4x - 4 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad -(x + 2)^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$

\+ $-2 < m < -1$: BPT (1) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{2 - m - \sqrt{3(2 - m)(2 + m)}}{2(m + 1)} \\ x < \dfrac{2 - m + \sqrt{3(2 - m)(m + 2)}}{2(m + 1)} \end{array}\right.$

\+ $-1 < m < 2$:

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow \frac{2 - m - \sqrt{3(2 - m)(2 + m)}}{2(m + 1)} < x < \frac{2 - m + \sqrt{3(2 - m)(2 + m}}{2(m + 1)}$$

\+ $m = 2$: BPT (1) $\Leftrightarrow$ $3x^2 < 0$: vô nghiệm

+ $m > 2 \Rightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow (m + 1)x^2 + (m - 2)x + m - 2 > 0, \forall x \in R$

Tóm lại :

- $m < -2$: BPT có nghiệm là $\forall x \in R$
- $m = -2$: BPT có nghiệm là $\forall x \in R \setminus \{-2\}$
- $-2 < m < -1$: BPT có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x > \dfrac{2 - m - \sqrt{3(4 - m)^2}}{2(m + 1)} \\ x < \dfrac{2m + \sqrt{3(4 - m^2)}}{2(m + 1)} \end{array}\right.$
- $m = -1$: BPT có nghiệm là $x > -1$
- $-1 < m < 2$: BPT có nghiệm là

$$\frac{2 - m - \sqrt{3(4 - m^2)}}{2(m + 1)} < x < \frac{2 - m + \sqrt{3(4 - m^2)}}{2(m + 1)}$$

- $m \geq 2$: BPT vô nghiệm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các bất phương trình :

a) $-3x^2 + 5x - 2 \leq 0$ **b)** $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$

c) $(x^2 - 4x + 2)^2 - (2x^2 + 2x + 7)^2 \leq 0$

d) $\dfrac{x - 2}{1 - x} + \dfrac{x - 3}{x + 1} \geq \dfrac{x^2 + 4x + 15}{x^2 - 1}$ **e)** $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{x^2 - x + 1} \leq \dfrac{2x + 5}{x^3 + 1}$

f) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(3 - x)} \leq 0$

2. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $x^2 - mx + m + 3 \leq 0$ **b)** $(m + 1)x^2 - 2mx + 2m > 0$

c) $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0$

3. Tùy theo m, hãy tìm miền xác định của các hàm số :

a) $y = (2x - 7)\sqrt{x^2 - (m + 2)x - 2(m + 2)}$

b) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2mx + 2 - m}}{x(x^2 - 5x + 4)}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{m^2x^2 + (m^2 + 3)x + 3}}{x} + 7x - 7$.

DẠNG 3 : DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI TRÊN MỘT MIỀN

Bài 1. Xác định m để :

a) $x^2 + 2(m - 1)x + m + 5 \geq 0, \quad \forall x \in R$

b) $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 < 0, \forall x \in R$

Giải

a) $x^2 + 2(m - 1)x + m + 5 \geq 0, \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = (m - 1)^2 - m - 5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 3m - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad -1 \leq m \leq 4$

b) + $m = 0$: BPT $\Leftrightarrow \quad -4x - 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{5}{4}$ (không đúng $\forall x \in R$)

+ $m \neq 0$: BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 4(m + 1)^2 - m(m - 5) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 3m^2 + 13m + 4 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -4 < m < -\frac{1}{3}$

Vậy : $-4 < m < -\frac{1}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 2. Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm là R :

a) $mx^2 + 10x - 5 \leq 0$ **b)** $\left|\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + 1}\right| \leq 2$.

Giải

a) Đặt : $f(x) = m^3x^2 + 10x - 5, \quad \forall x \in R$

- $m = 0$: $f(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$ (không đúng $\forall x \in R$)
- $m \neq 0$: $f(x) \leq 0, \ \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 25 + 5m^3 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^3 \leq -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m \leq -\sqrt[3]{5}$

Vậy : $m \leq -\sqrt[3]{5}$ là các giá trị cần tìm.

b) $\left|\frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + 1}\right| \leq 2, \quad \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \quad |x^2 - mx + 1| \le 2(x^2 + 1), \quad \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - mx + 1 \le 2(x^2 + 1) \\ x^2 - mx + 1 \ge -2(x^2 + 1) \end{cases} \quad (\forall x \in R)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + mx + 1 \ge 0 \\ 3x^2 - mx + 3 \ge 0 \end{cases} \quad (\forall x \in R)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4 \le 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 6 \le 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le m \le 2.$$

Bài 3. Xác định m để hàm số : $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3}$ được xác định với mọi $x \in R$.

Giải

y xác định $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \quad g(x) = (m + 1)\,x^2 - 2\,(m - 1)\,x + 3m - 3 \ge 0, \ \forall x \in R$$

- $m = -1$: $g(x) = 4x - 6 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge \dfrac{3}{2}$ (không đúng $\forall x \in R$)
- $m \ne -1$: $g(x) \ge 0, \ \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3(m^2 - 1) \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > -2 \\ (m - 1)(-2m - 4) \le 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m > -1 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m \ge 1$$

Vậy : $m \ge 1$ là kết quả cần tìm

Bài 4. Xác định m để : $f(x) = x^2 - (m + 2)x - 2(m + 2) \ge 0, \ \forall x \ge 2.$

Giải

Ta có : $\Delta = (m + 2)^2 + 8(m + 2) = (m + 2)(m + 10)$

Do đó : $f(x) \ge 0, \ \forall x \ge 2$ có các trường hợp sau :

- $\Delta \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \le m \le -2 \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge 0, \ \forall x \in R$
- $\Delta > 0$: $f(x) \ge 0, \ \forall x \ge 2$

$\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa : $x_1 < x_2 \le 2$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(2) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4 - 2(m + 2) - 2(m + 2) \ge 0 \\ m + 2 < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m + 2 \le 1 \\ m + 2 < 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m \le -1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -2 < m \le -1 \\ m < -10 \end{array}\right.$$

(kết hợp với trường hợp $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -10 \end{cases}$)

Vậy : $m \le -1$ là kết quả cần tìm.

Bài 5. Định a để : $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0, \quad \forall x \in [2; 3]$.

Giải

- Nếu $2 - 3a > 2a - 3 \quad \Leftrightarrow \quad a < 1$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của : $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$ là

$$S = (2a - 3; 2 - 3a)$$

Do đó để $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0, \quad \forall x \in [2; 3]$

$$\Leftrightarrow \quad [2; 3] \subset S \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 3 < 2 < 3 < 2 - 3a$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a < \dfrac{5}{2} \\ a < -\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a < -\frac{1}{3} \ (< 1).$$

- Nếu $2 - 3a < 2a - 3 \quad \Leftrightarrow \quad a > 1$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$ là

$$S = (2 - 3a; 2a - 3)$$

Do đó để $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0, \forall x \in [2; 3]$

$$\Leftrightarrow \quad [2; 3] \subset S \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 3a < 2 < 3 < 2a - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > \dfrac{4}{3} \\ a > 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a > 3 \ (> 1)$$

Vậy : $\left[\begin{array}{l} a < -\dfrac{1}{3} \\ a > 3 \end{array}\right.$ là kết quả cần tìm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Định m để các bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in R$:

a) $x^2 - 2mx + m - 5 \ge 0$

b) $mx^2 + 4(m + 1)x + m - 7 < 0$

c) $(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m - 1 \le 0$

d) $(m-2)x^2 - 2(m-2)x - m + 3 > 0$

(Câu được tính trong đề thi học kỳ 2 của Lớp 10 LHSAV Trường Phổ thông Năng khiếu – ĐHQG TPHCM năm 2002).

2. Định m để :

$$9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz > 0$$

$\forall x, y, z$ không đồng thời bằng không.

3. Định m để các bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in R$

a) $-6 < \dfrac{2x^2 - mx - 4}{x^2 + x + 1} \le 4$ **b)** $1 \le \dfrac{3x^2 + mx + 5}{2x^2 - x + 1} \le 6$

4. Định m để :

a) $(m+2)x^2 - 2(m+3)x + 3 - m \le 0 \quad \forall x \le \Delta$

b) $x^2 - 2mx + m - 2 > 0 \quad \forall x \in [0; 2]$

c) $mx^2 - (m+1)x = \dfrac{m}{4} \ge 0 \quad \forall x \ge 0.$

5. Định m để :

a) $y = \sqrt{-x^2 + mx + m + 3}$ xác định $\forall x \in [0; 3]$

b) $y = \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - mx + 1}}$ xác định $\forall x \in [-1; 1]$

6. Cho bất phương trình : $x^2 - 6x + m \le 0$.

Định m để :

a) Bất phương trình vô nghiệm

b) Bất phương trình có đúng một nghiệm

7. Định m để các hàm số sau xác định với mọi $x \in R$:

a) $y = \sqrt{\cos 2x + m\cos x + 4}$

b) $y = \dfrac{\sin x^4 + \cos x^4 - 2004}{\sqrt{\sin x^6 + \cos x^6 + m.\sin x.\cos x}}$

8. Định m để :

a) $(x+1)(x+3)(x^2 + 4x + 16) \ge m \quad \forall x \in R$

b) $x^4 - mx^2 + 1 \ge 0 \quad \forall x \in R$

9. Cho bất phương trình : $x^2 + 2\sqrt{2}\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)x + 1 \geq 0$

a) Tìm x để bất phương trình được nghiệm đúng với mọi y

b) Tìm y để bất phương trình được nghiệm đúng với mọi x

c) Tìm y để bất phương trình được nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

10. Định m để hệ bất phương trình : $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 + mx + 1 \leq 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

DẠNG 4 : SO SÁNH MỘT SỐ (HOẶC HAI SỐ) VỚI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1. Xác định m để hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình

$$(m - 2)x^2 + 2(4 - 3m)x + 10m - 11 = 0$$

thỏa $-4 < x_1 < x_2 < 6$.

Giải

$$-4 < x_1 < x_2 < 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (4 - 3m)^2 - (m - 2)(10m - 11) > 0 \\ (m - 2)f(-4) > 0 \\ (m - 2)f(6) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{3m - 4}{m - 2} \in (-4;\ 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 24m + 16 - (10m^2 - 11m - 20m + 22) > 0 \\ (m - 2)[16(m - 2) - 8(4 - 3m) + 10m - 11] > 0 \\ (m - 2)[36(m - 2) + 12(4 - 3m) + 10m - 11] > 0 \\ -4 < \dfrac{3m - 4}{m - 2} < 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 < 0 \\ (m - 2)(50m - 75) > 0 \\ (m - 2)(10m - 35) > 0 \\ \dfrac{7m - 12}{m - 2} > 0 \\ \dfrac{-3m + 8}{m - 2} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{7}{2} \\ m < 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < \dfrac{12}{7} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{8}{3} \\ m < 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < m < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} < m < 6 \end{array}\right.$$

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình :

$$mx^2 - 2(m + 1) + 1 = 0 \quad (1)$$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

(ĐH Sư phạm Vinh)

Giải

- Với m = 0 : PT (1) $\Leftrightarrow$ $-2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1}{2} \in (0; 1)$
- Với $m \neq 0$: PT (1) có đúng một nghiệm $\in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \quad f(0).f(1) < 0$$

(Để ý : $\Delta' = (m + 1)^2 - m = m^2 + m + 1 > 0, \quad \forall x \in R$)

$$\Leftrightarrow \quad m - 2(m + 1) + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -1$$

Vậy : $m > -2$ là kết quả cần tìm.

Bài 3. Định m để phương trình :

$$(4x^2 - 4x)^2 + 4m(4x^2 - 4x) + 1 - 3m = 0 \quad (1)$$

có nghiệm.

Giải

Đặt $t = 4x^2 - 4x = (2x - 1)^2 - 1 \geq -1$

PT (1) $\Leftrightarrow$ $t^2 + 4mt + 1 - 3m = 0$ (2)

Đặt $f(t) = t^2 + 4mt + 1 - 3m$ thì (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm ≥ -1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(-1) \le 0 \\ \begin{cases} af(-1) \ge 0 \\ \Delta' \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 4m + 1 - 3m \le 0 \\ \begin{cases} 1 - 4m + 1 - 3m \ge 0 \\ 4m^2 + 3m - 1 \ge 0 \\ -2m \ge -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{2}{7} \\ \begin{cases} m \le \dfrac{2}{7} \\ \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1}{4} \\ m \le -2 \end{array}\right. \\ m \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{1}{4} \le m \le \dfrac{2}{7} \\ m \le -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{1}{4} \\ m \le -1 \end{array}\right.$$

Bài 4. Định m để phương trình :

$$2m.\sin^2 x + 2(m + 1)\sin x + m - 1 = 0 \qquad (1)$$

có duy nhất một nghiệm thuộc $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Giải

Đặt $t = \sin x \in (-1; 1)$, $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Với mỗi $t \in (-1, 1)$ ta có duy nhất một $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ để $t = \sin x$

Ta có : PT (1) $\Leftrightarrow$ $2mt^2 + 2(m + 1)t + m - 1 = 0$ (2)

Do đó PT (1) có nghiệm duy nhất $\in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ PT (2) có nghiệm duy nhất $\in (-1; 1)$

Ta có các trường hợp :

- $m = 0$: (2) $\Leftrightarrow$ $2t - 1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $t = \dfrac{1}{2}$.

- $m \neq 0$: PT (2) có nghiệm duy nhất $\in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x = -\dfrac{m+1}{2m} \in (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} af(x_1 = -1) = 0 \\ x_2 = S + 1 \in (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} af(x_1 = 1) = 0 \\ x_2 = S - 1 \in (-1; 1) \end{cases} \\ f(-1).f(1) < 0 \end{array}\right.$$

(Với $f(t) = 2mt^2 + 2(m+1)t + m - 1, \quad \forall t \in R$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2m(m-1) = 0 \\ x = -\dfrac{m+1}{2m} \in (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} 2m - 2(m+1) + m - 1 = 0 \\ -\dfrac{m+1}{m} + 1 \in (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} 2m + 2(m+1) + m - 1 = 0 \\ -\dfrac{m+1}{m} - 1 \in (-1; 1) \end{cases} \\ [2m - 2(m+1) + m - 1]\,[2m + 2(m+1) + m - 1] < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m^2 + 4m + 1 = 0 \\ -1 < \dfrac{m+1}{2m} < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m - 3 = 0 \\ -\dfrac{1}{m} \in (-1; 1) \end{cases} \\ \begin{cases} 5m + 1 = 0 \\ -\dfrac{2m-1}{m} \in (-1; 1) \end{cases} \\ (m-3)(5m+1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{5} \\ m = 3 \\ -\dfrac{1}{5} < m < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 + \sqrt{5} \\ -\dfrac{1}{5} < m \leq 3. \end{array}\right.$$

Bài 5. Tìm a, b $\in$ Z để phương trình : $x^2 + ax + b = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa : $-2 < x_1 < -1 < 1 < x_2 < 2$.

Giải

Đặt $f(x) = x^2 + ax + b, \ \forall x \in R$

Do đó : $-2 < x_1 < -1 < 1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \\ a, b \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a + b > 0 \\ 1 - a + b < 0 \\ 1 + a + b < 0 \\ 4 + 2a + b > 0 \\ a, b \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b < 0 \\ 1 + a + b < 0 \\ 4 - 2a + b > 0 \\ 4 + 2a + b > 0 \\ b > -4 \\ b < -1 \\ a, b \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = -3 \\ -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \\ a \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} b = -2 \\ -1 < a < 1 \\ a \in Z \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 0 \\ b = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Tìm m để các phương trình sau có các nghiệm x_1, x_2 thỏa :

a) $mx^2 - 2mx + 1 = 0$; $x_1 < 0 < x_2$

b) $(m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 2m - 1 = 0$; $1 \le x_1 < 3 < x_2$

c) $(m + 1)x^2 - 3mx + 4m = 0$; $2 < x_1 < x_2 \le 5$

d) $(m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$; $0 < x_1 < -6 < x_2 < 4$.

2. Tìm m để các phương trình :

a) $2x^2 + 2(m - 1)x + m + 5 = 0$ có nghiệm $\in [0; 3]$

b) $(m - 1)x^2 + (2m - 3)x + m + 1 = 0$ có nghiệm $\in [-2; 1]$

c) $mx^2 - 2(m + 1)x + m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm này nằm ngoài $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

d) $(m + 1)x^2 - (m - 2)x + m + 1 = 0$ có một nghiệm thuộc $(-1; 2)$ và nghiệm còn lại lớn hơn 2.

3. Tìm m để các phương trình :

a) $(m-1)\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + (m-5)\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + m - 1 = 0$ có nghiệm $\in [0; +\infty)$

b) $(m-2)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + 2(4-3m)\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 10m - 11 = 0$ có nghiệm $\in [-1; 1]$.

4. Tìm a để phương trình :

$$(a+1)x^2 - (8a+1)x + 9a - 1 = 0$$

có đúng một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

5. Định m để các phương trình :

a) $\frac{5}{\sin^2 x} + 5\tan^2 x + (m-1)(\tan x + \cot x) = 10$ có nghiệm $\in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\cos 2x + (2m-1)\cos x + 1 - m = 0$ có nghiệm $\in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

DẠNG 5 : CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM (BẰNG GIÁN TIẾP)

Bài 1. Cho $ab + bc + ca \neq 0$. Chứng minh rằng phương trình :

$$ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a) = 0$$

có nghiệm.

Giải

Xét $f(x) = ab(x-a)(x-b) + bc(x-b)(x-c) + ca(x-c)(x-a)$

Vì $ab + bc + ca \neq 0$ nên f(x) là một tam thức bậc hai.

Hơn nữa : $\begin{cases} f(a).f(b).f(c) = -[abc(a-b)(b-c)(c-a)]^2 \le 0 \\ f(0) = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad [f(0).f(a)][f(0).f(b)][f(0).f(c)] \le 0$

$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(0).f(a) \le 0 \\ f(0).f(b) \le 0 \\ f(0).f(c) \le 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in R$.

Bài 2. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm :

a) $a^2(x-6)+a(x-6)(x-5)+5(x-5)=0$ (a tham số khác không)

b) $(x-a)(x-c)+m(x-b)(x-d)=0$

($m \neq -1$; $a < b < c < d$ là các tham số)

c) $\dfrac{a^2}{x-p}+\dfrac{b^2}{x-q}=c$ (1) ($a, b, c \neq 0$ và p, q tùy ý).

Giải

a) Đặt : $f(x)=a^2(x-6)+a(x-6)(x-5)+5(x-5)$, $\forall x \in R$

Rõ ràng đây là tam thức bậc hai.

Hơn nữa : $\left.\begin{array}{l} f(5)=-a^2 \\ f(6)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(5).f(6)<0$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Đặt : $f(x)=(x-a)(x-c)+m(x-b)(x-d)$, $\forall x \in R$

Vì $m \neq -1 \Rightarrow$ f là tam thức bậc hai

Hơn nữa : $\begin{cases} f(b)=(b-a)(b-c) \\ f(d)=(d-a)(d-c) \end{cases}$

$\Rightarrow f(b).f(d)=\underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{(b-c)}_{<0}\underbrace{(d-a)}_{>0}\underbrace{(d-c)}_{>0}<0$

$\Rightarrow$ nên phương trình luôn có nghiệm.

c) • Nếu $p=q$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{x-p}=c$

$\Leftrightarrow x=p+\dfrac{a^2+b^2}{c}$ $(\neq p)$ nghiệm này nhận

• Nếu $p \neq q$ thì (1) $\Leftrightarrow a^2(x-q)+b^2(x-p)=c(x-p)(x-q)$

$\Leftrightarrow a^2(x-q)+b^2(x-p)-c(x-p)(x-q)=0$

Đặt : $f(x)=a^2(x-q)+b^2(x-p)-c(x-p)(x-q)$, $\forall x \in R$

(Đây là tam thức bậc hai, vì $c \neq 0$) có $\begin{cases} f(p)=a^2(p-q) \\ f(q)=b^2(q-p) \end{cases}$

$\Rightarrow f(p).f(q)=-a^2b^2(p-q)^2<0$

$\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $(\neq p, q)$

$\Rightarrow$ (Đpcm).

Bài 3. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ $(m > 0)$ thì phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{có nghiệm} \in (0; 1).$$

b) Nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{có nghiệm} \in (0; 1).$$

(Cao đẳng Tài chính Kế toán 4, năm 2004)

c) Nếu $2a + 6b + 19c = 0$ thì phương trình :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{có nghiệm} \in \left[0; \frac{1}{3}\right].$$

Giải

Đặt : $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in R.$

a) • Nếu $a = 0$ thì $\frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{mb}{m+1}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = bx - \frac{mb}{m+1} = b\left(x - \frac{m}{m+1}\right).$$

$$\Rightarrow \quad \text{PT} : f(x) = 0 \text{ có nghiệm } x = \frac{m}{m+1} \in (0; 1)$$

• Nếu $a \neq 0$ thì : $f(0) = c$

Và
$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = a\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2 + b\left(\frac{m+1}{m+2}\right) + c$$

$$= \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right]$$

$$= \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[-\frac{c}{m} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\right] = \frac{-c}{m(m+2)}$$

$$\Rightarrow \quad f(0).f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{-c^2}{m(m+2)} \leq 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in (0; 1)$?

$\Rightarrow$ (Đpcm) (Bạn đọc tự giải thích điều này)

b) Ta có : $2a + 3b + 6c = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$

$\Rightarrow$ Câu b) chỉ là trường hợp đặc biệt của câu a) khi $m = 1$.

c) • Nếu a ≠ 0, ta có : $\begin{cases} f(0) = c \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c = \frac{1}{9}(a + 3b + 9c) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f(0) + 18f\left(\frac{1}{3}\right) = c + 2a + 6b + 18c = 2a + 6b + 19c = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(0).f\left(\frac{1}{3}\right) = -18\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \le 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình f(x) = 0 có nghiệm $\in \left[0; \frac{1}{3}\right]$.

• Nếu a = 0, ta có :

$$f(x) = bx + c = bx - \frac{6b}{19} \quad \left(\text{vì } 6b + 19c = 0 \Rightarrow c = -\frac{6}{19}b\right)$$

$$= b\left(x - \frac{6}{19}\right)$$

$\Rightarrow$ phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x = \frac{6}{19} \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$

$\Rightarrow$ (Đpcm).

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Chứng minh rằng phương trình :

$(x - 200)(x - 1) + a(5x - 602) = 0$ luôn có nghiệm $\forall a \in R$.

2. Chứng minh rằng phương trình :

$(x - 2004)(x - 2005) + (x - 2005)(x - 2006) + (x - 2006)(x - 2004) = 0$

luôn có nghiệm.

3. Cho $\frac{a}{2003} + \frac{b}{2002} = \frac{1}{2004}$.

Chứng minh rằng phương trình $x^2 - ax - b = 0$ có nghiệm $\in (0; 1)$.

4. Cho $\begin{cases} k > l > m > 0 \\ km \le l^2 \\ \frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m} = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm $\in (0; 1)$.

5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc khoảng (α, β) $(\alpha < \beta)$.

Chứng minh rằng : $\begin{cases}(a\alpha^2 + b\alpha + c)(2a\alpha + b) < 0 \\ (a\beta^2 + b\beta + c)(2a\beta + b) > 0\end{cases}$

6. Cho $|a| < |b| - 1$. Chứng minh rằng phương trình :

$$a\cos x + b\cos 2x + 1 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \in (0; \pi).$$

7. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Chứng minh rằng :

a) Nếu $|a| > |b| + |c|$ thì trong khoảng $(-1; 1)$ phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt hoặc không có nghiệm nào.

b) Nếu $|b| > |a| + |c|$ thì trong khoảng $(-1; 1)$ phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm.

c) Nếu $|c| > |a| + |b|$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nào trong khoảng $(-1; 1)$.

8. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Chứng minh rằng : nếu phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm

thì phương trình $af[f(x)] + bf(x) + c = x$ vô nghiệm.

DẠNG 6 : CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Dạng 1 : $af^2(x) + bf(x) + c = 0$ (1)

Đặt $t = f(x)$ $\Rightarrow$ (1) trở thành : $at^2 + bt + c = 0$.

Dạng 2 : $a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$ (2)

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \geq 2$ $\Rightarrow$ (2) trở thành : $at^2 + bt + c - 2a = 0$.

Dạng 3 : $a\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + c = 0$ (3)

Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$, $t \in R$ $\Rightarrow$ (3) trở thành : $at^2 + bt + c + 2a = 0$.

Dạng 4 : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq 0)$

Chia 2 vế phương trình cho $x^2 > 0$, ta được :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0 \qquad \text{Đây là phương trình dạng 2.}$$

Dạng 5 : $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0 \ (a \neq 0)$

Chia 2 vế phương trình cho $x^2 > 0$, ta được :

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{1}{x}\right) + c = 0 \qquad \text{Đây là phương trình dạng 3.}$$

Dạng 6 : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2 = 0 \quad \left(\begin{cases} abde \neq 0 \\ \dfrac{e}{a} = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2 \end{cases}\right)$

Đặt $\dfrac{d}{b} = \lambda \neq 0$, ta có

Chia 2 vế phương trình cho x^2 ta được :

$$a\left(x^2 + \frac{e}{a}\cdot\frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{b}\cdot\frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $t = x + \dfrac{\lambda}{x}$ thì phương trình trở thành : $at^2 + bt + c - 2a\lambda = 0$.

Dạng 7 : $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e \quad (a + b = c + d)$

Đặt : $t = x^2 + (a + b)x$,

suy ra phương trình trở thành : $(t + ab)(t + cd) = e$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + (ab + cd)t + abcd - e = 0.$$

Dạng 8 : $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Đặt : $t = x + \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + a = t + \dfrac{a-b}{2} \\ x + b = t - \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình trở thành : $\left(t + \dfrac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t - \dfrac{a-b}{2}\right)^4 = c$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^4 + 12\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 - c = 0$$

Đây là phương trình trùng phương (thuộc dạng 1).

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $(x-4)^4+(x-6)^4=82$ (1)

b) $x(x+1)(x+2)(x+3)=3$ (2)

c) $x^4+4=5x(x^2-2)$ (3)

d) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ (4)

Giải

a) Đặt : $t = x - \dfrac{x+6}{2} = x-5 \Rightarrow x = t+5$

PT (1) trở thành : $(t+1)^4+(t-1)^4=82 \Leftrightarrow 2t^4+12t^2+2=82$

$$\Leftrightarrow t^4+6t^2-40=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t^2=4 & \text{(nhận)} \\ t^2=-10 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$$

b) PT (2) $\Leftrightarrow [x(x+3)][(x+1)(x+2)]=3$

$\Leftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)=3$

Đặt : $t = x^2+3x = \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} \geq -\dfrac{9}{4}$

Phương trình trở thành :

$$t(t+2)=3 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=1 & \text{(nhận)} \\ t=-3 & \text{(loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

c) PT (3) $\Leftrightarrow x^4-5x^3+10x+4=0$

Chia 2 vế phương trình cho $x^2>0$, ta được :

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-5\left(x-\frac{2}{x}\right)=0$$

Đặt : $t = x-\dfrac{2}{x} \Rightarrow t^2 = x^2+\dfrac{4}{x^2}-4 \Rightarrow x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2+4$

Phương trình trở thành :

$$t^2 + 4 - 5t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{2}{x} = 1 \\ x - \dfrac{2}{x} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - 4x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{6} \end{array}\right.$$

d) Chia 2 vế phương trình cho $x^2 > 0$, ta được :

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

Đặt : $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} |t| \geq 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$

Phương trình trở thành :

$$6(t^2 - 2) - 35t + 62 = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 35t + 50 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{10}{3} \\ t = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3} \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bài 2. Định m để phương trình : $x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

(Bộ đề tuyển sinh)

Giải

Đặt : $t = x^2 \geq 0$ phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 - 2(m + 1)t + 2m + 1 = 0 \quad (1)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2m - 1 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ S = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m > -1 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Gọi 2 nghiệm của (1) là t_1, t_2 ($0 < t_1 < t_2$). Yêu cầu 4 nghiệm của phương trình đã cho lập thành cấp số cộng

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{t_2},\ -\sqrt{t_1},\ \sqrt{t_1},\ \sqrt{t_2}$ là dãy cấp số cộng (theo thứ tự)

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = 9t_1$$

Hơn nữa : $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+1}{5} \\ t_1^2 = \dfrac{2m+1}{9} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{(m+1)^2}{25} = \frac{2m+1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 9m^2 + 18m + 9 = 50m + 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right. \qquad \text{(thỏa mãn (2))}$$

Thử lại ta dễ dàng nhận thấy rằng $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$ chính là các giá trị cần tìm.

Bài 3. Định a để phương trình : $x^4 + 2x^2 + 2ax + a^2 + 2a + 1 = 0$

a) có nghiệm nhỏ nhất **b)** có nghiệm lớn nhất.

Giải

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có : $x_0^4 + 2x_0^2 + 2ax_0 + a^2 + 2a + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2(x_0 + 1)a + (x_0^2 + 1)^2 = 0$$

$$\Delta' = (x_0 + 1)^2 - (x_0^2 + 1)^2 = (x_0 - x_0^2)(x_0^2 + x_0 + 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 - x_0^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_0 \leq 1$$

- $x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$
- $x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

Vậy : $\min(x_0) = 0$ (tại $a = -1$)

$\max(x_0) = 1$ (tại $x = -2$).

Bài 4. Định m để phương trình : $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$ (1)

có ít nhất hai nghiệm âm phân biệt.

Giải

Ta thấy x = 0 không phải là nghiệm của (1).

Do đó chia hai vế (1) cho $x^2 > 0$, ta được :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Đặt : $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} |t| \ge 2 \\ x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) trở thành : $t^2 + mt - 1 = 0$ (2)

Phương trình này luôn có hai nghiệm $t_1 < 0 < t_2$. Do đó yêu cầu phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm âm phân biệt

$\Leftrightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm $t_1 < -2 < 0 < t_2$? (Bạn đọc tự kiểm tra)

$\Leftrightarrow$ $4 - 2m - 1 < 0$ $\Leftrightarrow$ $m > \dfrac{3}{2}$.

Bài 5. Cho α và β là 2 nghiệm phân biệt của phương trình :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (1)$$

Chứng minh rằng : Nếu $\alpha\beta = 9$ thì $9a^2 + 160 = 48b$.

Giải

Rõ vậy x = 0 không phải là nghiệm của (1).

Do đó chia 2 vế (1) cho $x^2 > 0$, ta được :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

$\Leftrightarrow$ $t^2 + at + b - 2 = 0$, với $t = x + \dfrac{1}{x}$, $|t| \ge 2$ (2)

Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của (2) thì : $\begin{cases} t_1 + t_2 = -a \\ t_1 . t_2 = b - 2 \end{cases}$

Từ giả thiết, suy ra ta có thể xem $\begin{cases} t_1 = \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ t_2 = \beta + \dfrac{1}{\beta} \end{cases}$?

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = -a \\ \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{1}{\beta}\right) = b - 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \dfrac{\alpha + \beta}{3} = -a \\ 3 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{3} = b - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{3a}{4} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3b - 16 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{3a}{4} \\ (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 3b - 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3a}{4}\right)^2 = 3b - 10 \qquad \Rightarrow \qquad 9a^2 + 160 = 48b.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các phương trình :

a) $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1$

(Đề thi vào Trường phổ thông Năng khiếu – ĐHQG. TPHCM năm 1996)

b) $x^4 + (x + 1)^4 = 97$ **c)** $(x - 5)^4 + (x - 3)^4 = 16$.

2. Giải các phương trình :

a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ **b)** $5x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0$

d) $(x + 6)(x - 4)(x + 3)(x - 1) + 110 = 0$

e) $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$

f) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

3. Tìm giá trị của a để phương trình : $x^4 + (1 + 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$

a) vô nghiệm **b)** có một nghiệm duy nhất

c) có ba nghiệm phân biệt **d)** có bốn nghiệm phân biệt.

4. Tìm các giá trị của a để phương trình :

$x^4 + ax^3 - (2a + 1)x^2 - ax + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt < -1.

5. Tìm m để phương trình : $x^4 - (3m + 5)x^2 + (m + 1)^2 = 0$

có 4 nghiệm lập thành cấp số cộng.

(Đề thi học kì I của Lớp 11 Lí, Hóa, Anh, Sinh, Văn Trường Phổ thông Năng khiếu – ĐHQG TPHCM năm học 2002 – 2003)

6. Tìm m để phương trình : $\frac{4x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{mx}{1+x^2} + 1 - \frac{m^2}{4} = 0$ có nghiệm.

7. Với giá trị nào của a thì phương trình :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - a = 0$$ có 4 nghiệm phân biệt.

8. Tìm m để phương trình : $\sin^4 x + m\cos^2 x + 4 = 0$ có nghiệm.

9. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm :

a) $x^4 + mx^3 + 3mx^2 + mx + 1 = 0$

b) $x^4 + mx^2 - m = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{x^2} + (1 - 3m)\left(x - \frac{1}{x}\right) + 3m = 0$

d) $(x + 2)(x + 4)(x^2 + 6x + 10) = (m + 2)(m + 4)(m^2 + 6m + 10)$.

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

DẠNG 1 : HỆ $\begin{cases} \mathbf{ax + by = c} \\ \mathbf{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0} \end{cases}$

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ xy - x^2 + 24 = 0 \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-5}{2} \\ 2x^2 - 3x.\frac{3x-5}{2} + \left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3x-5}{2} \\ 2x^2 + \frac{15x - 9x^2}{2} + \frac{9x^2 - 30x + 25}{4} - 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{3x-5}{2} \\ -x^2 + 9 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + (x-1)^2 = 41 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x^2 - 2x - 40 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x - 20 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

c) Hệ $\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ x = \dfrac{2x-1}{3} - x^2 + 24 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{3} + 24 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ x^2 + x - 72 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = -9 \\ x = 8 \end{array}\right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -9 \\ y = -\dfrac{19}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 2. Tìm a để hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a + 1 \\ x - y = 6 \end{cases}$ (1)

có hai nghiệm phân biệt.

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2a + 1 \\ y = x - 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + (x-6)^2 = 2a + 1 \\ y = x - 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 12x + 35 - 2a = 0 \quad (2) \\ y = x - 6 \end{cases}$$

Do đó để hệ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = 36 - 2(35 - 2a) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -34 + 4a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \dfrac{17}{2}.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x^2 - xy + y^2 = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 4y = 84 \\ (x + y)^2 = 81 \end{cases}$

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 5y = m \\ 4x^2 + 5y^2 = 9 \end{cases}$. Tìm m để :

a) Hệ vô nghiệm

b) Hệ có một nghiệm duy nhất

c) Hệ có 2 nghiệm phân biệt

d) Hệ có 2 nghiệm phân biệt (x_0, y_0) thỏa mãn $x_0 \geq y_0$.

3. Giải và biện luận theo m các hệ sau :

a) $\begin{cases} 3x - 2y = m \\ 2xy + x + y + 8 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 - x + y = m \\ x + y = 1 \end{cases}$

DẠNG 2 : HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI MỘT :

$$\begin{cases} \mathbf{f(x,y) = 0} \\ \mathbf{g(x,y) = 0} \end{cases} \left(\textbf{với } \begin{cases} \mathbf{f(x,y) = f(y,x)} \\ \mathbf{g(x,y) = g(y,x)} \end{cases} (\forall \mathbf{x, y} \in \mathbf{R}) \right)$$

Bài 1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$ *(Đại học An Giang năm 2000)*

b) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$ *(Đại học Quốc gia Hà Nội năm 2000)*

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$ *(Đại học Sư Phạm Hà Nội năm 2000)*

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{13}{6}xy \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = \dfrac{13}{6}xy \\ x + y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ (x+y)^2 - 2xy + 3(x+y) = 28 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 11 - (x+y) \\ (x+y)^2 - 2[11 - (x+y)] + 3(x+y) = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 11 - (x+y) \\ (x+y)^2 + 5(x+y) - 50 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 11 - (x+y) \\ \left[\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + y = -10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 21 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(2; 3), (3; 2), (-3; -7), (-7; -3)\}.$$

c) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ (7 - xy)^2 - x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 7 \\ 49 - 14xy = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = xy + 7 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(1; 2), (2; 1), (-1; -2), (-2; -1)\}.$$

Bài 2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ phương trình khi a = 4.

b) Định a để hệ có nghiệm.

(Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế năm 1998)

Giải

a) Khi a = 4 : Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = 4 \\ x + y = 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 8 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4.$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = a^2 \\ x + y - \sqrt{xy} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} = \dfrac{a^2 - a}{3} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ là nghiệm phương trình : $X^2 - aX + \dfrac{a^2 - a}{3} = 0$ (2)

Do đó yêu cầu hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm không âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - \dfrac{4}{3}(a^2 - a) \geq 0 \\ S = a \geq 0 \\ S = \dfrac{a^2 - a}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + 4a \geq 0 \\ a \geq 0 \\ a^2 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 4 \\ a \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a \geq 1 \\ a \leq 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 1 \leq a \leq 4. \end{array}\right.$$

Bài 3. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m \end{cases}$ (1)

a) Giải hệ khi m = 6.

b) Tìm m để hệ có nghiệm.

(Đại học Thủy sản Nha Trang năm 2000)

Giải

Đặt : $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{y+1} \geq 0 \end{cases}$ Suy ra :

Hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ (u^2 - 1)v + (v^2 - 1)u + u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ u^2v + uv^2 = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv(u + v) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = \dfrac{m}{3} \end{cases} \qquad (2)$$

a) Khi m = 6, ta có :

$$\text{Hệ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{y+1} = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (2) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình $X^2 + 3X + \dfrac{m}{3} = 0$ có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - \dfrac{4m}{3} \geq 0 \\ S = 3 \geq 0 \\ P = \dfrac{m}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{27}{4}.$$

Bài 4. Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ có nghiệm.

(Đại học và Cao đẳng, khối D năm 2004)

Giải

Ta có : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{xy} = m \end{cases}$$

Do đó (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4m \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{1}{4}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$ *(Đại học Dân lập Lạc Hồng năm 1998)*

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13 \end{cases}$ *(Đại học Ngoại thương năm 1998)*

c) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$ *(Đại học Tài chánh Kế toán Hà Nội năm 2001)*

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy = \dfrac{7}{2} \\ x + y = \dfrac{3xy}{2} \end{cases}$ *(Đại học Dân lập Hải Phòng năm 2000)*

2. Tìm các giá trị của a để hệ sau có đúng hai nghiệm : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$

(Đại học Y Dược TP.HCM năm 1998)

3. Cho hệ $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = –3. **b)** Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - k(\sqrt{x + y} - 1) = 1 \\ x + y = xy + 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi k = 0.

b) Tìm tất cả các giá trị của k để hệ có nghiệm duy nhất.

(Đại học Dân lập Hồng Đức năm 2001)

5. Cho hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 - 4 \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi a = 3.

b) Xác định a để hệ có nghiệm (x_0, y_0) sao cho $x_0.y_0$ nhỏ nhất.

6. Giải và biện luận các hệ sau :

a) $\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = a^4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = a \\ x^5 + y^5 = a^5 \end{cases}$

7. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ *(Cao đẳng Kinh tế Đối ngoại năm 2005)*

b) $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$ *(Cao đẳng Tài chính Kế toán 4 năm 2005)*

DẠNG 3 : HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI HAI $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ f(y,x)=0 \end{cases}$

Bài 1. Giải các hệ sau :

a) $\begin{cases} 2x^2+xy=3x \\ 2y^2+xy=3y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2=3x+2y \\ y^2=3y+2x \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2-y^2)=3(x-y) \\ 2y^2+xy=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[2(x+y)-3]=0 \\ 2y^2+xy=3y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2y^2+xy=3y \end{cases} \\ \begin{cases} 2(x+y)=3 \\ 2y^2+xy=3y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 3x^2-3x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}-y \\ 2y^2+\left(\dfrac{3}{2}-y\right)y=3y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=1 \\ \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}-y \\ y^2-\dfrac{3y}{2}=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (x,y)\in\left\{(0;0),(1;1),\left(0;\frac{3}{2}\right),\left(\frac{3}{2};0\right)\right\}.$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3x+2y \\ x^2-y^2=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x^2=3x+2y \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1 \\ x^2=3x+2y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x^2=5x \end{cases} \\ \begin{cases} y=1-x \\ x^2=3x+2(1-x) \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=5 \\ \begin{cases} y=1-x \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=5 \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\{(0;0),(5;5),(-1;2),(2;-1)\}.$

Bài 2. Xác định a để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+ax \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases}$

Giải

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x^2=x^3-y^3-4(x^2-y^2)+a(x-y) \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-y)[x^2+xy+y^2-3(x+y)+a]=0 \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x=y \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x^2+xy+y^2-3(x+y)+a=0 \\ x^2=y^3-4y^2+ay \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x(x^2-5x+a)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=y \\ x^2-5x+a=0 \end{cases} \end{array}\right.$

Để hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$ thì $x^2 - 5x + a = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \quad \Delta = 25 - 4a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{25}{4}$$

Khi đó : Hệ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)x+y^2-3y+a=0 & (3) \\ x^2=y^3-4y^2+ay & (4) \end{cases}$

Xét phương trình (3) có :

$$\Delta y = (y-3)^2 - 4(y^2-3y+a) = -3y^2+6y+9-4a$$

$$= -3(y^2-2y+1)+12-4a = -3(y-1)^2 + 4\underbrace{(3-a)}_{<0} < 0, \quad \forall a >$$

$\Rightarrow$ Phương trình (3) vô nghiệm, $\forall a > \frac{25}{4}$

$\Rightarrow$ Hệ gồm phương trình (3) và (4) vô nghiệm, $\forall a > \frac{25}{4}$

Vậy : với $a > \frac{25}{4}$, hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 0$.

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$

(Đại học và Cao đẳng khối B năm 200

Giải

Điều kiện : $x, y > 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 3xy^2 & (1) \\ y^2 + 2 = 3x^2y & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 3xy(y - x) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y)(x + y + 3xy) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = y \quad$ (vì $x + y + 3xy > 0, \forall x, y > 0$)

Thay vào (1) ta có : $x^2 + 2 = 3x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^3 - x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x^2 = 5x + 3y \\ y^2 = 5y + 3x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{2007}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{2007}{x} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = x + 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$ *(câu d trích từ Đề thi ĐH Thái Nguyên năm 2001).*

2. Định m để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} + |y| = m \\ \sqrt{y^2 + 3} + |x| = m \end{cases}$

3. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y + 1} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{m} \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 9.

b) Xác định m để hệ có nghiệm.

(Đại học Sư phạm TPHCM năm 2001)

4. Xác định a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} (x + 1)^2 = y + a \\ (y + 1)^2 = x + a \end{cases}$

(Đại học Luật TP.HCM năm 2001)

5. Xác định m để hệ phương trình :

$\begin{cases} x^2 + (m + 2)x = my \\ y^2 + (m + 2)y = mx \end{cases}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

(Cao đẳng Sư phạm TP.HCM năm 2001)

6. Xác định m để hệ $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = x(x^2 + m) \\ x^2 + 4y^2 = y(y^2 + m) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 - 4 lần VIII năm 200

7. Cho hệ $\begin{cases} x = y^2 - y + 2m + 1 \\ y = x^2 - x + 2m + 1 \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = –1.

b) Tìm m để hệ có nghiệm.

c) Tìm m để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

d) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

8. Giải và biện luận các hệ sau :

a) $\begin{cases} x^3 = mx + \dfrac{m}{2}y \\ y^3 = my + \dfrac{m}{2}x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + my = x^2 \\ 5y + mx = y^2 \end{cases}$

DẠNG 4 : HỆ ĐẲNG CẤP BẬC HAI $\begin{cases} \mathbf{ax^2 + bxy + cy^2 = 1} \\ \mathbf{a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 1'} \end{cases}$

Bài 1. Giải các hệ sau :

a) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$ *(Đại học Sư phạm TP.HCM năm 2000)*

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 12 \\ x^2 - xy + 3y^2 = 11 \end{cases}$ *(Đại học Dân lập Phương Đông năm 2000)*

Giải

a) Ta xét 2 trường hợp :

* x = 0 : Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 = 9 \\ y^2 = 2 \end{cases}$ vô nghiệm

* $x \neq 0$: Đặt y = tx

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x^2t + 3t^2x^2 = 9 \\ 2x^2 + 2x^2t + t^2x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3t^2 + 2t + 1) = 9 \\ x^2(t^2 + 2t + 2) = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 2} = \dfrac{9}{2} \\ x^2(t^2 + 2t + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2 + 4t + 2 = 9t^2 + 18t + 18 \\ x^2(t^2 + 2t + 2) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \ \vee \ t = -\dfrac{8}{3} \\ x^2(t^2 + 2t + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x^2.2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{8}{3} \\ x^2.\dfrac{34}{9} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t = -\dfrac{8}{3} \\ x^2 = \dfrac{9}{17} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = tx = \mp 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm \dfrac{3}{\sqrt{17}} \\ y = tx = \mp \dfrac{8}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \left\{(1; -2), (-1; 2), \left(\frac{3}{\sqrt{17}}; -\frac{8}{\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{17}}; \frac{8}{\sqrt{17}}\right)\right\}.$$

b) Ta xét 2 trường hợp :

* $x = 0$: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 12 \\ 3y^2 = 11 \end{cases}$ vô nghiệm

* $x \neq 0$: Đặt $y = tx$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x^2t + x^2t^2 = 12 \\ x^2 - x^2t + 3x^2t^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 + 3t + t^2) = 12 \\ x^2(1 - t + 3t^2) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{3t^2 - t + 1} = \dfrac{12}{11} \\ x^2(3t^2 - t + 1) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11t^2 + 33t + 22 = 36t^2 - 12t + 12 \\ x^2(3t^2 - t + 1) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25t^2 - 45t - 10 = 0 \\ x^2(3t^2 - t + 1) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2 - 9t - 2 = 0 \\ x^2(3t^2 - t + 1) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \\ x^2(3t^2 - t + 1) = 11 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2.11 = 11 \\ t = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2.\dfrac{33}{25} = 11 \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 = 1 \\ t = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 = \dfrac{25}{3} \\ t = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = tx = \pm 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\dfrac{5}{\sqrt{3}} \\ y = tx = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad (x, y) \in \left\{(1; 2), (-1; -2), \left(\frac{5}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Bài 2. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 0.

b) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm.

(Đại học Quốc gia TP.HCM

Giải

a) Khi m = 0 : Hệ trở thành $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$

Nếu **x** = 0 thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 11 \\ 3y^2 = 17 \end{cases}$ vô nghiệm

Do đó x ≠ 0, vì vậy ta đặt y = tx

Suy ra, hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ x^2(1 + 2t + 3t^2) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2 + 2t + 3}{3t^2 + 2t + 1} = \dfrac{11}{17} \\ x^2(t^2 + 2t + 3) = 11 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17t^2 + 34t + 51 = 33t^2 + 22t + 11 \\ x^2(t^2 + 2t + 3) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16t^2 - 12t - 40 = 0 \\ x^2(t^2 + 2t + 3) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 - 3t - 10 = 0 \\ x^2(t^2 + 2t + 3) = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right. \\ x^2(t^2 + 2t + 3) = 11 \end{cases}$$

- $t = 2 \Rightarrow 11x^2 = 11 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$
- $t = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{33x^2}{16} = 11 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

Vậy nghiệm của hệ là :

$$(x, y) \in \left\{(1; 2), (-1; -2), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

b)* *Khi $m = 16$:* Hệ trở thành $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 33 \end{cases}$

Rõ ràng $(x, y) = (0; \pm\sqrt{11})$ là các nghiệm của hệ $\Rightarrow$ Hệ có nghiệm khi $m = 16$.

* *Khi $m \neq 16$:*

Nếu $x = \propto$ thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 11 \\ 3y^2 = 17 + m \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $x \neq 0$, nên ta có thể đặt $y = tx$

Lúc này hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ x^2(1 + 2t + 3t^2) = 17 + m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ \dfrac{1 + 2t + 3t^2}{3 + 2t + t^2} = \dfrac{17 + m}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ (m - 16)t^2 + 2(m + 6)t + 3m + 40 = 0 \end{cases}$$

Vì : $3 + 2t + t^2 = (t + 1)^2 + 2 > 0, \forall t \in R$

Do đó hệ đã cho có nghiệm

$\Leftrightarrow \quad \Delta' = (m + 6)^2 - (m - 16)(3m + 40) \geq 0 \quad (?)$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + 12m + 36 - (3m^2 + 40m - 48m - 640) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 - 10m - 338 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$

Vậy : $5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$ là kết quả cần tìm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2y^2 - 6xy = 3 \\ 5x^2 - 4xy + y^2 = 11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 7x^2 + 5xy + 4y^2 = 30 \\ 5x^2 - 8xy + 3y^2 = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 + 8xy + 4y^2 = 0 \\ 6x^2 + 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ x^2 + 4xy - 2y^2 = -6 \end{cases}$

(Đề thi vào lớp 10 Trường phổ thông Năng khiếu ĐHQG TP.HCM

e) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$

(Đại học Kiến trúc TP.HCM năm 200

2. Chứng minh rằng hệ $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$ có nghiệm $\forall m \in R$.

3. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

(Đại học An ninh năm 200

4. Định m để hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = m \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$$ có nghiệm duy nhất.

§7. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 4x - x^2 - 7 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 \ge 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 6x - 16 \le 0 \end{cases}$

Giải

a) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 7 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 3 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 1 + \sqrt{2} \\ x \le 1 - \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 + \sqrt{2} \\ x \le 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le x \le 8 \\ -2 \le x \le \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Bài 2. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m < 0 & (1) \\ x^2 + (m+7)x + 7m < 0 & (2) \end{cases}$$

(Học viện Quan hệ Quốc tế năm 1997)

Giải

- PT (1) có $\Delta_1 = (m+2)^2 - 8m = (m-2)^2$

  $\Rightarrow$ Tập nghiệm của (1) là $S_1 = \left(\dfrac{m + 2 - |m-2|}{2} ; \dfrac{m + 2 + |m-2|}{2} \right)$

- PT (2) có $\Delta_2 = (m+7)^2 - 28m = (m-7)^2$

  $\Rightarrow$ Tập nghiệm của (2) là $S_2 = \left(\dfrac{-m - 7 - |m-7|}{2} ; \dfrac{-m - 7 + |m-7|}{2} \right)$

- nếu $m > 0$ thì $\begin{cases} \dfrac{m + 2 - |m-2|}{2} > 0 \\ \dfrac{-m - 7 + |m-7|}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing$

- nếu $m < 0$ thì $0 \in S_1 \cap S_2$ (?)

- nếu $m = 0$ thì $S_1 \cap S_2 = (0; 2) \cap (-7; 0) = \varnothing$

Vậy : $m \le 0$ là kết quả cần tìm.

Bài 3. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 - 2mx \le 0 \\ -2m \le x - 1 + m \le 2m \end{cases}$$

(Đại học Thủy lợi

Giải

- Nếu m < 0 thì hệ vô nghiệm.
- Nếu m = 0 thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \le 0 \\ x = 1 \end{cases}$ vô nghiệm
- Nếu m > 0 thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2m \\ 1 - 3m \le x \le 1 + m \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m = 1 - 3m \\ 1 + m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{5} \\ m = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi $m = \dfrac{1}{5}$.

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau đây có nghiệm :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \ge 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \le \dfrac{m}{m-1} \end{cases} \quad (1$$

(ĐH Quốc gia Hà Nội và Học viện Ngân hàng (khối A) năm 2001

Giải

Điều kiện cần : Giả sử hệ bất phương trình đã cho có nghiệm (x; y) :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \ge 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 \le \dfrac{m}{m-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 \ge 3 \\ -6x^2 - 6xy - 3y^2 \ge \dfrac{-3m}{m-1} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \quad -x^2 - 4xy - 4y^2 \ge 3 - \frac{3m}{m-1} = \frac{-3}{m-1} \quad \Rightarrow \quad -(x + 2y)^2 \ge \frac{-3}{m-1}$$

$$\Rightarrow \quad (x + 2y)^2 \le \frac{3}{m-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{m-1} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad m > 1$$

Điều kiện đủ : Giả sử m > 1 $\Rightarrow \dfrac{m}{m-1} = 1 + \dfrac{1}{m-1} > 1$

Xét hệ $\begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$ (2)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ 3(2x^2 + 2xy + y^2) - (5x^2 + 2xy - y^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ (x + 2y)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2xy - y^2 = 3 \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20y^2 - 4y^2 - y^2 = 3 \\ x = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{5} \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \mp \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ (2) có nghiệm $\Rightarrow$ Hệ (1) có nghiệm $\forall m > 1$.

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm là $m > 1$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các bất phương trình :

a) $\begin{cases} 5x^2 - 24x - 77 > 0 \\ 3x - 7 \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2 + x - 10 < 0 \\ 2x^2 - 5x + 13 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ x - 7 \geq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 \geq 9 \\ \dfrac{x+1}{x} < 1 \end{array} \right. \\ (x + 2)(x - 5) \leq 0 \end{cases}$

2. Xác định m để hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leq 0 \\ x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m \leq 0 \end{cases}$$

(Đại học Ngoại thương)

3. Xác định a để hệ sau có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 \leq a \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq a \end{cases}$

(Đại học Giao thông Vận tải)

4. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm (x; y) thỏa mãn điều kiện $x \geq 4$:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \leq a \end{cases}$$

(Đại học Sư phạm Hà Nội năm 2001)

5. a) Tìm a để hệ : $\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \dfrac{1-a}{1+a} \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$ có nghiệm.

b) Tìm a để hệ : $\begin{cases} x^2 - 2x + a - 1 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3a - 2 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

6. Cho m > 1. Chứng minh rằng hệ bất phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} m^2(1-y^2) \geq x^2 \\ x - m^3 \geq my^2 \end{cases}$$

(Đại học Huế)

7. Giải và biện luận theo m các hệ sau :

a) $\begin{cases} 4x + 1 \leq 7x - 2 \\ mx^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - (m+1)x + 2(m-1) \leq 0 \\ x^2 - (m+2)x + 3(m-1) \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 2x - m \leq 0 \\ x^2 - 4x + 6m \leq 0 \end{cases}$

§8. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
- $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B \Leftrightarrow A^2 = B^2$
- $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giai các phương trình :

a) $|x^2 - 4x| = |2x - 7| + 1$ (1)

(ĐH Thủy sản (cơ sở II tại TP.HCM) năm 2001)

b) $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$ (2)

c) $|x - 2| = 3|3 - x|$ (3)

Giải

a)

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{2}$	4	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	0	− | −	0	+
$2x - 7$	− | −		0	+ |	+

- nếu $x \le 0$: PT (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 7 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -2$$

- nếu $0 \le x \le \frac{7}{2}$: PT (1) $\Leftrightarrow 4x - x^2 = 7 - 2x + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$$

- nếu $\frac{7}{2} \le x \le 4$: PT (1) $\Leftrightarrow 4x - x^2 = 2x - 7 + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{7}$$

- nếu $x \ge 4$: PT (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 2x - 7 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 + \sqrt{3} \\ x = 3 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{3}$$

Vậy nghiệm cần tìm là : $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 3 + \sqrt{3} \end{array}\right.$

b) $|x^2 - 5x + 4| = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ (x^2 - 5x + 4)^2 = (x + 4)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 - 5x + 4 + x + 4)(x^2 - 5x + 4 - x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 - 4x + 8)(x^2 - 6x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ [(x-2)^2 + 4]x(x - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

c) $|x - 2| = 3|3 - x| \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9(x - 3)^2$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = (3x - 9)^2$$

$$\Leftrightarrow (3x - 9 - x + 2)(3x - 9 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 7)(4x - 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7}{2} \\ x = \dfrac{11}{4} \end{array}\right.$$

Bài 2. Định a để phương trình : $|2x - a| + 1 = |x + 3|$ (1)

có nghiệm duy nhất.

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán – Tin học ĐHSP Hà Nội 1)

Giải

$$\text{PT}: |2x - a| + 1 = |x + 3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - a \geq 0 \\ 2x - a + 1 = x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ 2x - a \geq 0 \\ 2x - a + 1 = -x - 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x - a \leq 0 \\ -2x + a + 1 = x + 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \leq 0 \\ 2x - a \leq 0 \\ -2x + a + 1 = -x - 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a + 2 \\ 2(a+2) - a \ge 0 \\ a + 2 + 3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a-4}{3} \\ 2.\dfrac{a-4}{3} - a \ge 0 \\ \dfrac{a-4}{3} + 3 \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a-2}{3} \\ 2.\dfrac{a-2}{3} - a \le 0 \\ \dfrac{a-2}{3} + 3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = a + 4 \\ 2(a+4) - a \le 0 \\ a + 4 + 3 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = a + 2 \\ a \ge -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a-4}{3} \\ a \le -8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{a-2}{3} \\ a \ge -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = a + 4 \\ a \le -8 \end{cases} \end{array}\right.$$

Do đó PT (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge -4 \\ a + 2 = \dfrac{a-2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a \le -8 \\ \dfrac{a-4}{3} = a + 4 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -4 \\ a = -8 \end{array}\right.$$

Bài 3. Tìm m để phương trình :

$$x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = 0 \quad (1)$$

có nghiệm.

GIẢI

Đặt : $t = |x - 1| \ge 0$, ta có :

$$x^2 - 2x - m|x - 1| + m^2 = |x - 1|^2 - m|x - 1| + m^2 - 1$$
$$= t^2 - mt + m^2 - 1 = f(t)$$

Do đó yêu cầu PT (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ PT : $f(t) = 0$ có nghiệm $t \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} af(0) \le 0 \\ \begin{cases} af(0) \ge 0 \\ \Delta \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 1 \le 0 \\ \begin{cases} m^2 - 1 \ge 0 \\ m^2 - 4m^2 + 4 \ge 0 \\ \dfrac{m}{2} \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le m \le 1 \\ 1 \le m \le \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad -1 \le m \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các phương trình :

a) $|x^2 - 4| = x^2 - 3x + 4$

b) $|x + 1| = x^2 - 3x + 2$

c) $|x^2 - 3x - 1| = 3|x^2 + x + 1|$

d) $|x^2 - 3| = |x^2 + 3x - 2|$

e) $||x^2 - 2x| - x| - |x + 1| = 2$

f) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + |x| = \dfrac{x^2}{|x+1|}$.

2. Giải và biện luận theo m các phương trình :

a) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 2m + 1$

b) $(x - 4)|x - 3| = m^2$

c) $|x - 1|(x - m) = 1$.

3. Định m để phương trình : $|x^2 - mx + 1| = x + 1$

có nghiệm duy nhất.

4. Định m để phương trình : $|x^2 + 4x + 3| = 2x^2 + x + 2m + 1$

có hai nghiệm phân biệt.

5. Định m để phương trình : $|x - 2008|^2 = 2|x - m|$

có 4 nghiệm phân biệt.

§9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nhóm 1 :

- $|A| \le |B| \quad \Leftrightarrow \quad A^2 < B^2$
- $|A| \le B \quad \Leftrightarrow \quad -B \le A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B \ge 0 \\ A^2 \le B^2 \end{cases}$
- $|A| \ge B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A \ge B \\ A \le -B \end{array}\right.$

Nhóm 2 :

- $|A| < |B| \quad \Leftrightarrow \quad A^2 < B^2$
- $|A| < B \quad \Leftrightarrow \quad -B < A < B$
- $|A| \ge B \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $|x^2 - 4| \le x^2 - 3x + 4$ **b)** $|x^2 - 4| > x^2 - 3x + 5$

c) $|x^2 - 3| \le |x^2 + 3x - 2|$.

Giải

a) Ta có : $|x^2 - 4| \le x^2 - 3x + 4$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 3x - 4 \le x^2 - 4 \le x^2 - 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x \ge 0 \\ 3x - 8 \le 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{3}{2} \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ x \le \dfrac{8}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{8}{3} \end{array}\right.$$

b) $|x^2 - 4| > x^2 - 3x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 > x^2 - 3x + 5 \\ x^2 - 4 < -x^2 + 3x - 5 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ 2x^2 - 3x + 1 < 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{array}\right.$$

c) $|x^2 - 3| \le |x^2 + 3x - 2| \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 - (x^2 + 3x - 2)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3 + x^2 + 3x - 2)(x^2 - 3 - x^2 - 3x + 2) \le 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(-3x - 1) \le 0$

$\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 5)(3x + 1) \ge 0$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x + 1$		−	|	−	0	+	|	+	
$2x^2 + 3x - 5$		+	0	−	|	−	0	+	
$(3x + 1)(2x^2 + 3x - 5)$		−	0	+	0	−	0	+	

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{2} \le x \le -\frac{1}{3} \\ x \ge 1 \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải và biện luận theo m : $|x^2 - 2x + m| \le |x^2 - 3x - m|$.

Giải

BPT $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - (x^2 - 3x - m)^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m - x^2 + 3x + m)(x^2 - 2x + m + x^2 - 3x - m) \le 0$

$\Leftrightarrow (x + 2m)(2x^2 - 5x) \le 0$

Đặt : $f(x) = (x + 2m)(2x^2 - 5x)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \\ x = -2m \end{array}\right.$$

Xét các trường hợp :

TH1 : $m > 0$:

x	$-\infty$		$-2m$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x \le -2m \\ 0 \le x \le \frac{5}{2} \end{array}\right.$

TH2 : m = 0 :

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	−	0	+	

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có nghiệm là $x \le \frac{5}{2}$.

TH3 : $-\frac{5}{4} < m < 0$

x	$-\infty$		0		$-2m$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ -2m \le x \le \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

TH4 : $m = -\frac{5}{4}$

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	+	

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

TH5 : $m < -\frac{5}{4}$:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$-2m$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	0	+	

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ \frac{5}{2} \le x \le -2m \end{array}\right.$.

Bài 3. Định m để : $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 \ge 0, \forall x \in R$

Giải

Đặt : $t = |x - m| \ge 0, \forall x \in R$

Do đó BPT $\Leftrightarrow$ $t^2 + 2t + 2 - m^2 \ge 0, \forall t \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(t + 1)^2 \ge m^2 - 1, \forall t \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $\underset{t \ge 0}{\text{Min}}\,(t + 1)^2 \ge m^2 - 1$

$\Leftrightarrow$ $1 \ge m^2 - 1$ $\Leftrightarrow$ $|m| \le \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các bất phương trình :

a) $|x^2 - 3x| \le 3$

b) $|x^2 - x - 7| \le |x^2 + 7x + 1|$ **c)** $|x^2 - 9| \ge x^2 - 9x + 1$

d) $\left|\dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 5x + 2}\right| \le 1$ **e)** $\dfrac{|x^2 + 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \ge 1$

f) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| \le x + 2$.

g) $|x^2 - 3x + 2| \le |x^2 + 3x + 2|$

2. Giải và biện luận theo m các bất phương trình :

a) $|x^2 + 5x - 6| \le 2m + 1$

b) $|5x^2 - x + m| \le |5x^2 - 3x + 2m|$.

3. Tìm m để :

a) $(x - 5)^2 + 2|x - 2m - 1| \ge 6, \forall x \in R$

b) $x^2 + m^2 + 2|x + m - 2| \ge 4, \forall x \in R$.

4. Cho bất phương trình : $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2007 \ge 0$ (1)

a) Tìm m để (1) đúng với mọi $x \in R$.

b) Tìm m để (1) đúng với mọi $x \ge 0$.

5. Tìm m để bất phương trình :

$x^2 + 3|x + m| + m^2 + m - 1 \le 0$ có nghiệm.

§10. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A \ge 0 \end{cases}$

- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \ge 0 \end{cases}$

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$ *(ĐH Xây dựng năm 2001)*

b) $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$ *(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2001)*

c) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$ *(ĐH Bách khoa Hà Nội năm 2001)*

Giải

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 6 = (2x-1)^2 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 6 = 4x^2 - 4x + 1 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 5 = 0 \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right. \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

b) $\sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1} = 1$. Điều kiện : $x \geq \dfrac{1}{2}$

Đặt : $f(x) = \sqrt{4x - 1} + \sqrt{4x^2 - 1}$

Dễ thấy rằng :
- f tăng trên $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

Vậy phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}$.

c) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$

Điều kiện : $\begin{cases} 2x^2 + 8x + 6 \geq 0 \\ 2x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \leq -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Khi đó : PT $\Leftrightarrow \sqrt{2(x+1)(x+3)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 2(x+1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+1}\right) = 0$

- $x = -1$ là một nghiệm của phương trình.
- $x \geq 1$. Ta có : $\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow 3x + 5 + 2\sqrt{2(x+3)(x-1)} = 4x + 4$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2(x+3)(x-1)} = x - 1$

$\Leftrightarrow 4.2.(x+3)(x-1) = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)(7x+25) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{25}{7} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$

Vậy : $x = \pm 1$ là các nghiệm cần tìm.

Bài 2. Giải phương trình : $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = \dfrac{x+5}{2}$.

(ĐH Thủy sản Nha Trang năm 2001)

Giải

PT $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2} = \dfrac{x+5}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 1 + \left|\sqrt{x+1} - 1\right| = \dfrac{x+5}{2}$

Đặt : $t = \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow t^2 - 1 = x$

Phương trình trở thành : $t + 1 + |t-1| = \dfrac{t^2+4}{2}$

$\Leftrightarrow 2t + 2 + 2|t-1| = t^2 + 4$

$\Leftrightarrow (t-1)^2 - 2|t-1| + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (|t-1| - 1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow |t-1| = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bài 3. Giải phương trình : $\sqrt[4]{56 - x} + \sqrt[4]{x + 41} = 5$.

(Ban Tuyển sinh Quân sự Bộ Quốc phòng năm 2001)

Giải

Điều kiện : $-41 \le x \le 56$

Đặt : $\begin{cases} u = \sqrt[4]{56 - x} \ge 0 \\ v = \sqrt[4]{x + 41} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^4 = 56 - x \\ v^4 = x + 41 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$ (1)

Hơn nữa : $(u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$

$$= u^4 + v^4 + 4uv(u^2 + v^2) + 6u^2v^2$$

$$= u^4 + v^4 + 4uv[(u + v)^2 - 2uv] + 6u^2v^2$$

$$= u^4 + v^4 + 4uv(u + v)^2 - 2u^2v^2$$

$$\Rightarrow 5^4 = 97 + 4uv.5^2 - 2u^2v^2$$

$$\Leftrightarrow (uv)^2 - 80(uv) + 264 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} uv = 6 \\ uv = 44 \end{array}\right.$$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 44 \end{cases} \text{ vô nghiệm} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 56 - u^4 = -25 \\ x = 56 - u^4 = 40 \end{array}\right.$$

Bài 4. Tìm điều kiện của m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} - \sqrt{(x - 1)(3 - x)} = m \qquad (1)$$

(Trung tâm Đào tạo Bồi dưỡng Cán bộ Y tế TP.HCM năm 1999)

Giải

Đặt : $t = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x} \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; 2], \forall x \in [1; 3]$

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x - 1)(3 - x)} \Rightarrow \sqrt{(x - 1)(3 - x)} = \frac{t^2 - 2}{2}$$

Suy ra : PT (1) $\Leftrightarrow$ $t - \dfrac{t^2 - 2}{2} = m$ $\Leftrightarrow$ $t^2 - 2t = 2 - 2m$

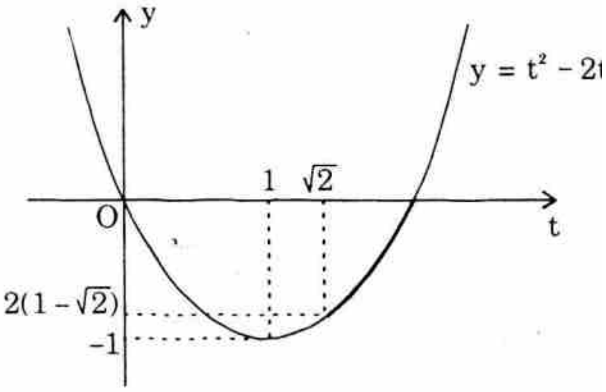
Vì vậy : PT(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \min\limits_{\sqrt{2} \le t \le 2} f(t) \le 2 - 2m \le \max\limits_{\sqrt{2} \le t \le 2} f(t)$

(với $f(t) = t^2 - 2t, \forall t \in R$)

$\Leftrightarrow 2\left(1 - \sqrt{2}\right) \le 2 - 2m \le 0$

$\Leftrightarrow 1 \le m \le \sqrt{2}$.



BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x+1} = x - 3$

b) $\sqrt{4 + 6x - x^2} = 4 - x$

c) $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{3x + 19} = 0$

d) $\sqrt{x^2 + 6x - 3} = \sqrt{4x + 5}$

e) $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{x + 1} = 2$

f) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3 - 2x} = x^2 - 2x + 3$.

2. Giải các phương trình :

a) $\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt[3]{x}} = 1$

b) $\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x + 6} = \sqrt[3]{2x + 11}$

c) $\sqrt[4]{47 - 2x} + \sqrt[4]{35 + 2x} = 4$

d) $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} = 1$

e) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.

3. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x + 7} = \sqrt[4]{x + 80}$

b) $2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$

c) $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x - 4} = 0$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

4. Tìm m để các phương trình :

a) $\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = m$ có nghiệm duy nhất.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

b) $m(\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2} + 2) = 2\sqrt{1 - x^4} + \sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}$ có nghiệm.

(Đại học và Cao đẳng khối B năm 2004)

5. Giải và biện luận theo m các phương trình :

a) $\sqrt{x^2 + 2x + m} = 2m + 1$

b) $\sqrt[3]{m - x} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{m - 1}$

c) $\sqrt{1 + m}\,.\sqrt[4]{\dfrac{1 - x}{1 + x}} + \sqrt{1 - m}\,.\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} = 2\sqrt[4]{1 - m^2}$ với $-1 < m < 1$.

§11. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Nhóm 1 :

- $\sqrt{A} \le \sqrt{B} \Leftrightarrow 0 \le A \le B$
- $\sqrt{A} \le B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B \ge 0 \\ A \le B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} \ge B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \ge 0 \\ B \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \ge B^2 \\ B \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Nhóm 2 :

- $\sqrt{A} < \sqrt{B} \Leftrightarrow 0 \le A < B$
- $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$
- $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A > B^2 \\ B \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \ge 0 \\ B < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

B. CÁC BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{(x + 5)(3x + 4)} > 4(x - 1)$ *(ĐH Kinh tế Quốc dân năm 2001)*

b) $\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x} \ge x$ *(ĐH Ngoại thương cơ sở II - TP.HCM năm 2001)*

c) $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \ge 0$ *(ĐH & CĐ chung cả nước năm 2002)*

Giải

a) $$\sqrt{(x+5)(3x+4)} > 4(x-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+5)(3x+4) > [4(x-1)]^2 \\ 4(x-1) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+5)(3x+4) \ge 0 \\ 4(x-1) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 + 19x + 20 > 16x^2 - 32x + 16 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge -\dfrac{4}{3} \\ x \le -5 \end{array}\right. \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13x^2 - 51x - 4 < 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ x \le -4 \\ -\dfrac{4}{3} \le x < 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{1}{13} < x < 4 \\ x \ge 1 \end{cases} \\ x \le -5 \\ -\dfrac{4}{3} \le x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x < 4 \\ x \le -5 \\ -\dfrac{4}{3} \le x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} \le x < 4 \\ x \le -5 \end{array}\right.$$

b) Ta có : $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \ge x$ (Điều kiện : $-1 \le x \le 1$)

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \ge x \Leftrightarrow x\left[2 - \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)\right] \ge 0$$

$\Leftrightarrow$ $x \ge 0$ (vì : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le 2$, $\forall x \in [1; 1]$. Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$?

Vậy : $0 \le x \le 1$ là nghiệm bất phương trình.

c) $$(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x \ge 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ x \ge 3 \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \ge 3 \\ x \le -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải các phương trình :

a) $5\sqrt{x} + \dfrac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \dfrac{1}{2x} + 4$ (1)

b) $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}\left(\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3}\right) \geq 2 + \sqrt{1 + x^2}$ (2)

Giải

a) Đặt : $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geq (\sqrt{2}\ ?) \quad \Rightarrow \quad t^2 = x + \dfrac{1}{4x} + 1$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{1}{4x} = t^2 - 1$$

Suy ra : BPT (1) $\Leftrightarrow \quad 5t < 2(t^2 - 1) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 5t + 2 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > 2 \\ t < \dfrac{1}{2} \text{ (loại, vì } t \geq \sqrt{2}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad t > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 4\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4\sqrt{x} + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} > \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ 0 < \sqrt{x} < \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \\ 0 < x < \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

b) Điều kiện : $-1 \leq x \leq 1$

Đặt : $x = \cos 2\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2})$

BPT $\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \sin 2\varphi}\left(2\sqrt{2}\cos^3\varphi - 2\sqrt{2}\sin^3\varphi\right) \geq 2 + \sin 2\varphi$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}(\sin\varphi + \cos\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)(1 + \sin\varphi.\cos\varphi) \geq 2 + \sin 2\varphi$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\cos 2\varphi\ (1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi) \geq 2 + \sin 2\varphi$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2}\cos 2\varphi \geq 1\ (?) \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\varphi \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Bài 3. Giải và biện luận theo m bất phương trình sau :

$$(x - m)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \qquad (1)$$

(ĐH Sư phạm Quy Nhơn (khối D) năm 2001)

Giải

$$\text{BPT (1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ \begin{cases} x - 4x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right. \\ x \geq m \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy : • nếu $m \leq 2$ thì nghiệm BPT (1) là $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ m \leq x \leq 2 \end{array}\right.$

• nếu $2 < m < 3$ thì nghiệm BPT (1) là $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

• nếu $m \geq 3$ thì nghiệm BPT (1) là $\left[\begin{array}{l} x \geq m \\ x = 3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 8 + x$ **b)** $\sqrt{x^2 + x - 12} < x - 2$

c) $\sqrt{x^2 + 3x - 7} \geq \sqrt{2x^2 - 9x + 5}$ **d)** $\sqrt{x - 2} > x - 4$

e) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geq x - 3$.

2. Giải các phương trình :

a) $(x - 3)\sqrt{x^2 - 4} \leq x^2 - 9$

(ĐH Y Dược TP.HCM Hệ cử nhân năm 2001)

b) $\dfrac{x^2}{\left(1 + \sqrt{1 + x}\right)^2} > x - 4$

(ĐH Vinh (khối A + B) năm 2001)

c) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

(ĐH Y Dược TP.HCM năm 2001)

d) $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{2x - 4}$

(Đại học và Cao đẳng khối A năm 2005)

3. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{x}{x+1} - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} \geq 3$

b) $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - (x^2 + 2x)$

c) $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 2} > 1$

d) $\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}} \leq 2$.

4. Giải và biện luận theo m các bất phương trình sau :

a) $\sqrt{m + x} + \sqrt{m - x} \geq m$

b) $\sqrt{mx^2 + 2(m+3)x + 3m + 1} < x - 1$.

5. Tìm α nhỏ nhất sao cho :

$$\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} \leq 2 - \frac{x^2}{\alpha}, \quad \forall x \in [0; 1]$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, lần VIII năm 2002)

6. Cho bất phương trình : $m\sqrt{2x^2 + 7} < x + m$ (1)

a) Giải bất phương trình (1) khi $m = \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm m để BPT (1) có tập nghiệm là R.

(ĐH Xây dựng)

7. Cho bất phương trình : $m^3x - \sqrt{x - 3} \leq m^3 + 1$

a) Giải bất phương trình khi m = 1.

b) Tìm m để bất phương trình có nghiệm.

8. Định m để các bất phương trình sau có nghiệm :

a) $mx + 3 \geq \sqrt{4x - x^2}$

b) $\sqrt{m + \sqrt{x}} + \sqrt{m - \sqrt{x}} \geq 2$.

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A_1. Định nghĩa và các tính chất

1. Định nghĩa :

- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow b - a < 0$
- $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0 \Leftrightarrow b - a \leq 0$

2. Các tính chất :

- $a \leq b$
- $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$
- $a > b \Leftrightarrow a \pm c > b \pm c$
- $\left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c > b + d$
- $a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac = bc = 0 & \text{nếu } c = 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$
- $\left.\begin{matrix} a > b \\ ab > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- $\begin{cases} a > b \geq 0 \\ 2 \leq n \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \end{cases}$
- $\begin{cases} a > b \\ n \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$

A_2. Các bất đẳng thức cổ điển

1. Bất đẳng thức Cauchy :

Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ $(2 \leq n \in Z)$ thì $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacopski (B.C.S)

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n \in R$ $(2 \le n \in Z)$ thì

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \exists k \in R : \left[\begin{array}{l} a_i = kb_i \\ b_i = ka_i \end{array}\right.$ $(\forall i = 1, 2, ..., n)$.

3. Bất đẳng thức Trebưsep :

Dạng 1. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \le \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

Dạng 2. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + ... + b_n}{n} \ge \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n}{n}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

4. Bất đẳng thức Bernoulli :

Dạng 1. Nếu $a \ge -1$ và $1 \le n \in Z$ thì : $(1 + a)^n \ge 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

Dạng 2. (Tổng quát) : Nếu $a > -1$ và $n \ge 1$ thì : $(1 + a)^n \ge 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

B. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1 : DÙNG ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài 1. Cho a, b, c > 0.

a) Chứng minh rằng : $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$ (1)

(ĐH Kiến trúc TP.HCM năm 2001)

b) Nếu thêm điều kiện ab + bc + ca = abc, thì :

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{cb}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\ge\sqrt{3} \qquad (2)$$

(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2000)

Giải

a) BĐT (1) $\Leftrightarrow \quad 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\ge 9$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\ge 0$$

BĐT cuối luôn đúng.

Vậy : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad a = b = c.$

b) Ta có : $3(b^2+2a^2)-(b+2a)^2 = 3(b^2+2a^2)-(b^2+4a^2+4ab)$

$$= 2(a^2+b^2-2ab) = 2(a-b)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow \quad 3(b^2+2a^2)\ge(b+2a)^2$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{b^2+2a^2}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}(b+2a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}\ge\frac{1}{abc\sqrt{3}}(bc+2ca)$$

Chứng minh tương tự : $\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{cb}\ge\frac{1}{abc\sqrt{3}}(ca+2ab)$

$$\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\ge\frac{1}{abc\sqrt{3}}(ab+2bc)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{cb}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\ge\frac{1}{abc\sqrt{3}}(3ab+3bc+3ca)=\sqrt{3}$$

(vì ab + ba + ca = abc)

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad a = b = c = 3.$

Bài 2. Cho a, b > 0.

a) Chứng minh rằng : $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (1) *(ĐH Huế năm 2000)*

b) Nếu thêm điều kiện a + b = 2 thì : $a^4 + b^4 \ge a^3 + b^3$ (2)

Giải

a) BĐT (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 . \frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}} \ge 0$ luôn luôn đúng.

b) *Cách 1.:* Đặt $a = 1 + \alpha \Rightarrow b = 1 - \alpha$

BĐP (2) $\Leftrightarrow (1 + \alpha)^4 + (1 - \alpha)^4 \ge (1 + \alpha)^3 + (1 - \alpha)^3$

$\Leftrightarrow 2(1 + 6\alpha^2 + \alpha^4) \ge 2(1 + 3\alpha^2)$

$\Leftrightarrow \alpha^4 + 3\alpha^2 \ge 0$ luôn luôn đúng

Dấu "=" $\Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow a = b = 1.$

Cách 2.

BPT (2) $\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \ge (a + b)(a^3 + b^3)$

$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \ge a^4 + ab^3 + a^3b + b^4$

$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - ab^3 - a^3b \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^3(a - b) - b^3(a - b) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a^3 - b^3(a - b) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 [a^2 + b^2 + (a + b)^2] \ge 0$ luôn luôn đúng

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 3.

a) Chứng minh rằng : $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \ge 1 + \sqrt{1-t^2} \ge 2 - t^2, \quad \forall t \in [-1; 1]$

b) Giải phương trình :

$$\sqrt{1 + \sqrt{2x - x^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{2x - x^2}} = 2(x-1)^4(2x^2 - 4x + 1)$$

(ĐH Quốc gia TP.HCM năm 2001)

Giải

a) $\forall t \in [-1; 1]$ ta có :

- $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \geq 1 + \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}\right)^2 \geq \left(1 + \sqrt{1-t^2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 2 + 2\sqrt{1-t^2} \geq 1 + 2\sqrt{1-t^2} + 1 - t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

- $1 + \sqrt{1-t^2} \geq 2 - t^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} \geq 1 - t^2 \quad (\geq 0)$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - t^2 \geq (1 - t^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 - t^2)t^2 \geq 0 \quad \text{(luôn đúng)}$$

Vậy : $\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \geq 1 + \sqrt{1-t^2} \geq 2 - t^2 \qquad \forall t \in [-1; 1]$.

b) Điều kiện : $\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ 1 \geq \sqrt{2x - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2$$

Đặt : $t = \sqrt{2x - x^2} \quad \Rightarrow \quad t \in [0; 1]$?

Suy ra : Vế phải PT $= 2(x^2 - 2x + 1)^2 [1 - 2(2x - x^2)]$

$= 2(1 - t^2)^2 (1 - 2t^2)$

$= 2(t^4 - 2t^2 + 1)(1 - 2t^2)$

$= 2(t^4 - 2t^2 + 1 - 2t^6 + 4t^4 - 2t^2)$

$= 2(-2t^6 + 5t^4 - 4t^2 + 1)$

Vế trái PT $= \sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} \geq 2 - t^2$ (Do câu a)

Do đó : Vế trái PT = Vế phải PT

$\Rightarrow \quad 2(-2t^6 + 5t^4 - 4t^2 + 1) \geq 2 - t^2$

$\Leftrightarrow \quad 4t^6 - 10t^4 + 7t^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 (4t^4 - 10t^2 + 7) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad t^2 \leq 0$ (vì $4t^4 - 10t^2 + 7 > 0, \forall t \in R$) $\quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Thử lại vào PT ta thấy nghiệm đúng.

Vậy : $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ là các nghiệm cần tìm.

Bài 4. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $x(1 - x^2) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{x}{y^2 + z^2} + \dfrac{y}{z^2 + x^2} + \dfrac{z}{x^2 + y^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" và đề thi ĐH Đà Nẵng năm 2001)

Giải

a) Đặt : $t = x^2 \in (0; 1)$:

BĐT $\Leftrightarrow$ $x(1 - x^2) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ $\Leftrightarrow$ $x^2(1 - x^2)^2 \le \dfrac{4}{27}$

$\Leftrightarrow$ $t(1 - t)^2 \le \dfrac{4}{27}$ $\Leftrightarrow$ $t^3 - 2t^2 + t - \dfrac{4}{27} \le 0$

$\Leftrightarrow$ $\left(t - \dfrac{1}{3}\right)^2\left(t - \dfrac{4}{3}\right) \le 0$ luôn đúng vì $t \in (0; 1)$.

b) Theo câu a) :

$$\frac{x}{y^2 + z^2} = \frac{x}{1 - x^2} = \frac{x^2}{x(1 - x^2)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad \text{(do câu a)}$$

Chứng minh tương tự : + $\dfrac{y}{z^2 + x^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}y^2$

$$\frac{z}{x^2 + y^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$$

Vậy : $\dfrac{x}{y^2 + z^2} + \dfrac{y}{z^2 + x^2} + \dfrac{z}{x^2 + y^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 5. Cho $0 \le a, b, c, d \le 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{bcd + 1} + \frac{b}{cda + 1} + \frac{c}{dab + 1} + \frac{d}{abc + 1} \le 3.$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

Giải

Ta có : $(1 - a)(1 - b) + (1 - c)(1 - d) + (1 - ab)(1 - cd) \ge 0$

$\Rightarrow$ $1 - (a + b) + ab + 1 - (c + d) + cd + 1 - (ab + cd) + abcd \ge 0$

$\Rightarrow$ $3 + abcd \ge a + b + c + d$ (1)

Suy ra : $\frac{a}{bcd+1}+\frac{b}{cda+1}+\frac{c}{dab+1}+\frac{d}{abc+1}\le$

$$\le \frac{a}{abcd+1}+\frac{b}{abcd+1}+\frac{c}{abcd+1}+\frac{d}{abcd+1} \quad \text{(do (1))}$$

$$\le \frac{3+abcd}{abcd+1}\le 3.$$

Chú ý : Bài toán tổng quát trong trường hợp này :

Cho $\begin{cases}2\le n\in Z\\ 0\le a_1,a_2,\dots,a_n\le 1\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$F=\frac{a_1}{a_2a_3\dots a_n+1}+\frac{a_2}{a_1a_3a_4\dots a_n+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1a_2\dots a_{n-1}+1}$$

Bạn đọc tự làm (Xem đây là một bài tập khó !).

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $\begin{cases}a,b\ge 0\\ a+b=1\end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$ **b)** $a^3+b^3\ge\frac{1}{2}$

(ĐH An Giang 2001)

2. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge 4$ **b)** $a+b\ge 16abc$

(ĐH Miền Bắc)

3. Cho a, b, c > 0 thỏa mãn : $a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Hãy chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

Điều ngược lại có đúng không ? Giải thích ?

(Đề thi vào lớp 10 Trường PT Năng khiếu ĐHQG TP.HCM)

4. Cho x, y, z ∈ [2; 2]. Hãy chứng minh rằng :

$$2(x^6+y^6+z^6)-(x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2)\le 192$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

5. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

$$\left(1-\frac{a}{b+c}\right)\left(1-\frac{b}{c+a}\right)\left(1-\frac{c}{a+b}\right) \le \frac{1}{8}$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

6. Cho a, b, c ∈ [0; 1]. Hãy chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c) \le 1$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

7. Cho $x, y \in \left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh bất đẳng thức : $\left|\frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right| < 1$

(ĐH Hàng hải năm 2001)

8. Cho $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a, b, c \ge 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $0 \le ab + bc + ca - 2abc \le \frac{7}{27}$

(Đề thi Olympic Toán quốc tế)

9. Cho a, b, c là 3 cạnh của ΔABC và S là diện tích.

Hãy chứng minh rằng :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

b) $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \ge 3\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^n S^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}$, $\forall n \in N$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

10. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

a) $a^3 + b^3 \ge ab(a+b)$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \le \frac{1}{abc}$

(Đề thi Olympic Toán Mĩ năm 1997)

11. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1$$

(Đề thi Olympic Toán quốc tế năm 2000)

DẠNG 2 : DÙNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

- Bất đẳng thức Cauchy
- Bất đẳng thức B.C.S
- Bất đẳng thức Bernoulli
- Bất đẳng thức Trêbusép

Bài 1. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\dfrac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\dfrac{c^3}{a^3}} \ge \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$

(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2001)

Giải

Theo bất đẳng thức Bernoulli :

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \left[1 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)\right]^{\frac{3}{2}} \ge 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} - 1\right) \ge \frac{3}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{2}$$

Chứng minh tương tự : $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^3}} \ge \dfrac{3}{2}\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{2}$

$$+ \quad \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} \ge \frac{3}{2}\frac{b}{c} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{3}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}$$

$$\ge \frac{3}{2}.3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} - \frac{3}{2} \quad \text{(Do BĐT Cauchy)}$$

$$\ge 3$$

Vậy : $\sqrt{\dfrac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\dfrac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\dfrac{c^3}{a^3}} \ge 3, \quad \forall a, b, c > 0$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = b = c > 0.

Bài 2. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a}{b + c - ta}} + \sqrt{\frac{b}{c + a - tb}} + \sqrt{\frac{c}{a + b - tc}} \ge 2\sqrt{1 + t}, \quad \forall t \in [0; 1]$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

Giải

Ta có : $\begin{cases} b + c - ta \geq b + c - a > 0 \\ c + a - tb \geq c + a - b > 0 \quad (\forall t \in [0; 1]) \\ a + b - tc \geq a + b - c > 0 \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$\sqrt{\frac{b + c - ta}{a}.(t+1)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{b + c - ta}{a} + (t+1)\right] \leq \frac{a + b + c}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a}{b + c - ta}} \geq \frac{2a\sqrt{t+1}}{a + b + c}$$

Chứng minh tương tự : $\quad + \quad \sqrt{\frac{b}{c + a - tb}} \geq \frac{2b\sqrt{t+1}}{a + b + c}$

$$\sqrt{\frac{c}{a + b - tc}} \geq \frac{2c\sqrt{t+1}}{a + b + c}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{a}{b + c - ta}} + \sqrt{\frac{b}{c + a - tb}} + \sqrt{\frac{c}{a + b - tc}} \geq 2\sqrt{t+1}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b + c - ta}{a} = t + 1 \\ \dfrac{a + b - tc}{c} = t + 1 \\ \dfrac{a + c - tb}{b} = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ a = b = c. \end{cases}$

Bài 3. Cho $0 < x_1, x_2, ..., x_n \leq 1 \quad (2 \leq n \in Z)$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leq \frac{1}{1 + n(1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n)}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

Giải

Đặt : $1 - x_i = a_i \quad (\forall i = 1, 2, ..., n)$

Do $0 < x_i < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < a_i < 1$

Khi đó : BĐT $\Leftrightarrow \quad \dfrac{1 - a_1 + 1 - a_2 + ... + 1 - a_n}{n} \leq \dfrac{1}{1 + na_1a_2...a_n}$

$\Leftrightarrow \quad [n - (a_1 + a_2 + ... + a_n)] (1 + na_1a_2...a_n) \leq n$

$\Leftrightarrow \quad (a_1 + a_2 + ... + a_n) (1 + na_1a_2...a_n) \geq n^2a_1a_2...a_n$

Theo BĐT Cauchy : $\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \\ 1 + na_1a_2\ldots a_n \geq 1 + (n-1)a_1a_2\ldots a_n \\ \geq n\sqrt[n]{(a_1a_2\ldots a_n)^{n-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + na_1a_2\ldots a_n) \geq n^2a_1a_2\ldots a_n$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Bài 4. Cho a, b, c là 3 cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng :

Nếu $a + b + c = 3$ thì $3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$.

(ĐH Vinh năm 2001)

Giải

Ta có : $\begin{cases} 0 < b + c - a = 3 - 2a \\ 0 < c + a - b = 3 - 2b \\ 0 < a + b - c = 3 - 2c \end{cases}$ (vì $a + b + c = 3$)

Theo BĐT Cauchy :

$$(3-2a)(3-2b)(3-2c) \leq \left(\frac{3-2a+3-2b+3-2c}{3}\right)^3 = 1 \text{ (vì } a+b+c=3)$$

$\Leftrightarrow$ $27 - 18(a + b + c) + 12(ab + bc + ca) - 8abc \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $27 - 18.3 + 6\left[\underbrace{(a+b+c)^2}_{9} - (a^2 + b^2 + c^2)\right] - 8abc \leq 1$

$\Leftrightarrow$ $3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = b = c = 1$.

Bài 5. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng : $8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$.

(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2000)

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$\begin{array}{rrcl} & 8^a + 1 + 1 & \geq & 3.2^a \\ + & 8^b + 1 + 1 & \geq & 3.2^b \\ & 8^c + 1 + 1 & \geq & 3.2^c \\ \hline \Rightarrow & 8^a + 8^b + 8^c + 6 & \geq & 3(2^a + 2^b + 2^c) \\ & & \geq & 2^a + 2^b + 2^c + 2(2^a + 2^b + 2^c) \\ & & \geq & 2^a + 2^b + 2^c + 2.3\sqrt[3]{2^a.2^b.2^c} \\ & & \geq & 2^a + 2^b + 2^c + \underbrace{6.2^{\frac{a+b+c}{3}}}_{6} \text{ (vì } a+b+c=0) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = b = c = 0$.

Bài 6. Cho $3 \leq n \in Z$. Chứng minh rằng : $n^{n+1} > (n+1)^n$.

(ĐH An ninh năm 2000)

Giải

Theo BĐT Bernoulli :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 . \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}$$

$$> \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 . \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$\geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 . \frac{2}{n+1} \geq \frac{2n^2}{(n+1)^3} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad n^{n+1} > (n+1)^n \quad \Rightarrow \quad \text{đpcm.}$$

Bài 7.

a) Cho x, y thỏa mãn : $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$ (1)

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 = 1$ (2)

b) Từ đẳng thức (2) có thể suy ra đẳng thức (1) được không ?

(Đề thi vào trường PT Năng khiếu ĐHQG TP.HCM)

Giải

a) Đặt : $t = x^2 + y^2 \geq 0$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$1 = \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \leq (x^2 + y^2)(1 - y^2 + 1 - x^2)$$

$$\leq (x^2 + y^2)[2 - (x^2 + y^2)]$$

$$\leq t(2 - t)$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 2t - t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad (t-1)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

b) Từ (2) không thể suy ra (1) được vì :

Chẳng hạn chọn $(x, y) = (0; -1)$ thỏa mãn (2), nhưng không thỏa mãn (1).

Bài 8. Cho $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 3 \\ 2 \le n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$\left|\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}\right| < \sqrt{2}.$$

Giải

$2 \le k \in Z$, ta có :

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{7}{2}}\right) + ... + \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right)$$

$$\le \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{2}{3}$$

Do đó theo BĐT Bunhiacopski :

$$\left|\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}\right| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.\sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}}$$

$$< \sqrt{3}.\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \text{đpcm.}$$

Bài 9. Chứng minh rằng :

Nếu phương trình : $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ (1)

có nghiệm thì $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{4}{3}$.

Giải

Gọi x_0 là nghiệm của (1), ta có : $x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x_0 \ne 0 \quad$ và $\quad -(1 + x_0^4) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0$

$\Rightarrow \quad (1 + x_0^4)^2 = (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 \le (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2)$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{(1 + x_0^4)^2}{x_0^6 + x_0^4 + x_0^2} \quad (2)$$

Mặt khác : $\dfrac{(1+x_0^4)^2}{x_0^6+x_0^4+x_0^2} \geq \dfrac{4}{3}$ (2)

$\Leftrightarrow \quad 3(1+2x_0^4+x_0^8) \geq 4(x_0^6+x_0^4+x_0^2)$

$\Leftrightarrow \quad 3x_0^8-4x_0^6+2x_0^4-4x_0^2+3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x_0^2-1)^2(3x_0^4+2x_0^2+3) \geq 0$ luôn đúng.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{4}{3}$.

Bài 10. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{a^{2007}+b^{2007}+c^{2007}}{a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}} \geq \dfrac{a+b+c}{3}$.

Giải

Không giảm tính tổng quát ta xem :

$0 < a \leq b \leq c \quad \Rightarrow \quad 0 < a^{2006} \leq b^{2006} \leq c^{2006}$

Theo BĐT Trêbưsép :

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}}{3} \leq \frac{a^{2007}+b^{2007}+c^{2007}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^{2007}+b^{2007}+c^{2007}}{a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad a = b = c > 0$.

Bài 11. Cho ΔABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn bán kính R = 1 và S là diện tích. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sin A.\sin 2A + \sin B.\sin 2B + \sin C.\sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{2S}{3}.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần V)

Giải

Không giảm tính tổng quát, ta xem : $0 < A \leq B \leq C \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sin A \leq \sin B \leq \sin C \\ \sin 2A \geq \sin 2B \geq \sin 2C \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsép :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{3} \leq$$

$$\leq \quad \frac{\sin A.\sin 2A + \sin B.\sin 2B + \sin C.\sin 2C}{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \sin B = \sin C \\ \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Mặt khác : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$?

$= (2R\sin A)(2R\sin B)\sin C$

$= ab\sin C$ (2)

$= 2S$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sin A.\sin 2A + \sin B.\sin 2B + \sin C.\sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{3} = \frac{2S}{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài 12. Cho $\begin{cases} a + b < 1 \\ a, b > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $\dfrac{a^2}{1-a} + \dfrac{b^2}{1-b} + \dfrac{1}{a+b} + a + b \geq \dfrac{5}{2}$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{a+b}\right)\left((1-a) + (1-b) + (a+b)\right) \geq (1+1+1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{1}{a+b} + a + b = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{a+b} - 2 \geq \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = b = \dfrac{1}{3}$.

Bài 13. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{2x+y+z} + \dfrac{1}{x+2y+z} + \dfrac{1}{x+y+2z} \leq 1$.

(Đại học và Cao đẳng khối A năm 2005)

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 4 số dương, ta có :

$$(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16, \forall a, b, c, d > 0$$

Suy ra :

$$\frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$+\quad \frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \quad VT \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right) = 1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài 14. Chứng minh rằng : $\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x + 4^x + 5^x, \forall x \in R$

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

(Đại học và Cao đẳng khối B năm 2005)

Giải

Cách 1. Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$3^x + 4^x + 5^x = \left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{x}{2}}.\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{x}{2}}.\left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{x}{2}}.\left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\le \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x}$$

$$\le \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$ (Bạn đọc tự kiểm tra)

Cách 2. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \ge 2.3^x$$

$$+\quad \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.5^x$$

$$\left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \ge 2.4^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{7}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x + 4^x + 5^x$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$.

Bài 15. Cho a, b, c, d ≥ 1 thỏa $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}=1$.

Chứng minh rằng : $\frac{1+a^3}{a}+\frac{1+b^3}{b}+\frac{1+c^3}{c}+\frac{1+d^3}{d}\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Giải

Giả sử $a \ge b \ge c \ge d > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} \le \frac{1}{b} \le \frac{1}{c} \le \frac{1}{d}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{1+a^3}-\frac{b}{1+b^3}=\frac{a-b+ab(b^2-a^2)}{(1+a^3)(1+b^3)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1+a^3}\le\frac{b}{1+b^3}$$

Chứng minh tương tự : $\frac{b}{1+b^3}\le\frac{c}{1+c^3}\le\frac{d}{1+d^3}$

- Theo bất đẳng thức Trebưsep :

$$\left(\frac{a}{1+a^3}+\frac{b}{1+b^3}+\frac{c}{1+c^3}+\frac{d}{1+d^3}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\le$$

$$\le 4\left(\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\right)\le 4 \quad (1)$$

- Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\left(\frac{1+a^3}{a}+\frac{1+b^3}{b}+\frac{1+c^3}{c}+\frac{1+d^3}{d}\right)\left(\frac{a}{1+a^3}+\frac{b}{1+b^3}+\frac{c}{1+c^3}+\frac{d}{1+d^3}\right)\ge 16 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{1+a^3}{a}+\frac{1+b^3}{b}+\frac{1+c^3}{c}+\frac{1+d^3}{d}\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Bài 16. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)^3>3+6\sqrt{3}.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Giải

Theo các bất đẳng thức Bernoulli và Cauchy, ta có :

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)^3 \geq 1+\frac{3}{\sin A}+1+\frac{3}{\sin B}+1+\frac{3}{\sin C}$$

$$\geq 3+3\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)$$

$$\geq 3+\frac{27}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

$$\geq 3+\frac{27}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$ (vì $0 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$)

(Bạn đọc tự kiểm tra bất đẳng thức này)

$$\Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{\sin A}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)^3+\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)^3 \geq 3+6\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \text{(đpcm)}.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

a) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8$ **b)** $\frac{a^2}{1-a}+\frac{b^2}{1-b}+\frac{c^2}{1-c} \geq \frac{3}{2}$

2. a) Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

(BĐT Minkowski)

b) Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

(Đại học và Cao đẳng khối D năm 2005)

3. Cho $0 \leq a_i \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 2)$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1}{S-a_{1+1}}+\frac{a_2}{S-a_{2+1}}+\ldots+\frac{a_n}{S-a_{n+1}}+(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \leq 1$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ)

4. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ $(n \geq 2)$. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt[n]{(n+1)!} \geq 1 + \sqrt[n]{n!}$

b) $\left(1 + \dfrac{x_1}{nx_1}\right)\left(1 + \dfrac{x_2}{nx_2}\right)\ldots\left(1 + \dfrac{x_n}{nx_n}\right) \geq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ)

5. Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+d} + \dfrac{c}{d+a} + \dfrac{d}{a+b} \geq 2$.

(Đề thi HSG TP.HCM, đây là dạng BĐT Nisbit)

6. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{a^n}{b+c} + \dfrac{b^n}{c+a} + \dfrac{c^n}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n-1} \quad \forall n \in N$

b) Nếu thêm điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ)

7. Cho $n \in [0; 1]$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}\,.$$

(ĐH An ninh năm 1999)

8. Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng :

a) $(b+c)^a + (c+a)^b + (a+b)^c > 2$

b) $a^b + b^a > 1$.

9. Cho ΔABC. m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến; h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao và S là diện tích của ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right).\left(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2\right) \geq 27S^2$

b) $S \leq \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2006)

10. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{[illegible]} \geq [illegible]$$

(ĐH Ngoại thương năm 1996)

11. Cho a + b + c = 1. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{3^a} + \dfrac{1}{3^b} + \dfrac{1}{3^c} \ge 3\left(\dfrac{a}{3^a} + \dfrac{b}{3^b} + \dfrac{c}{3^c}\right)$.

(Học viện Bưu chính Viễn thông năm 2001)

12. Cho ΔABC nhọn. Hãy chứng minh :

a) $\tan^8 A + \tan^8 B + \tan^8 C \ge 5\tan^2 A.\tan^2 B.\tan^2 C$

(ĐH Sư phạm Vinh năm 1999)

b) $\dfrac{a.A + b.B + c.C}{a + b + c} \ge \dfrac{\pi}{3}$ (với BC = a, CA = b, AB = c).

DẠNG 3 : DÙNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA TAM THỨC BẬC HAI, VECTƠ VÀ CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Cho a, b, c, d, p và q thỏa mãn : $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$.
Chứng minh rằng : $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \le (pq - ac - bd)^2$.

Giải

Ta có : $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$

$\Rightarrow \quad (p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0$

Vậy trong hai số $p^2 - a^2 - b^2$ và $q^2 - c^2 - d^2$ phải có một số dương. Ta có thể giả sử : $p^2 - a^2 - b^2 > 0$.

Xét tam thức bậc hai :

$$f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$$
$$= (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$$

$\Rightarrow \quad f\left(\dfrac{q}{p}\right) = -\left(a\dfrac{q}{p} - c\right)^2 - \left(b\dfrac{q}{p} - d\right)^2 < 0$

$\Rightarrow \quad (p^2 - a^2 - b^2).f\left(\dfrac{q}{p}\right) < 0$

$\Rightarrow \quad f(x) = 0$ luôn có nghiệm, tức là $\Delta' \ge 0$

$\Rightarrow \quad (pq - ac - bd)^2 \ge (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2)$.

Bài 2. Cho a, b, c ∈ R thỏa $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng : a, b, c $\in \left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{4}{3}\right]$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

Giải

Ta có : $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4$

$\Rightarrow \quad S = a + b + c = \pm 2$

$\Rightarrow \quad ab = 1 - c(a + b) = 1 - c(S - c) = c^2 - cS + 1$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} a + b = S - c \\ ab = c^2 - cS + 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ a, b là các nghiệm của phương trình bậc hai :

$t^2 - (S - c)t + c^2 - Sc + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta = (S - c)^2 - 4(c^2 - Sc + 1) \geq 0 \quad (?)$

$\Rightarrow \quad S^2 - 2cS + c^2 - 4c^2 + 4Sc - 4 \geq 0$

$\Rightarrow \quad 3c^2 - 2Sc \leq 0 \quad (\text{vì } S^2 = 4)$

$\Rightarrow \quad 3c^2 \leq 2Sc \leq 2|S|.|c| = 4|c| \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 4|c| \leq 0$

$\Rightarrow \quad |c| \leq \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{4}{3} \leq c \leq \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow$ đpcm.

Bài 3. a, b, c là 3 cạnh của ΔABC. Chứng minh rằng :

$$a^2.\sin^2x + b^2.\cos^2x > c^2.\sin^2x.\cos^2x, \quad \forall x \in R.$$

Giải

Xét $f(t) = a^2.\sin^2x + b^2.\cos^2x - c^2.\sin^2x.\cos^2x$

$= ta^2 + (1 - t)b^2 - c^2t(1 - t) \quad (\text{với } t = \sin^2x \in [0; 1])$

$= c^2t^2 - (b^2 + c^2 - a^2)t + b^2$

$\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$

$= [a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2]$

$= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) < 0$

$\Rightarrow \quad f(t) > 0, \forall t \in [0; 1] \quad \Rightarrow$ đpcm.

Bài 4. Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(2^x + 2^y + 2^z\right)\left(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}\right) \leq \frac{81}{8}$$

Giải

Đặt : $a = 2^x, \quad b = 2^y, \quad c = 2^z \quad (\Rightarrow \quad 1 \leq a, b, c \leq 2, \text{ vì } 0 \leq x, y\ z \leq 1)$

$\Rightarrow \quad (a - 1)(a - 2) \leq 0$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad a + \frac{2}{a} \le 3$$

Chứng minh tương tự : $\quad + \quad b + \dfrac{2}{b} \le 3$

$$c + \frac{2}{c} \le 3$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \le 9$$

$$\Rightarrow \quad 9 \ge 2\sqrt{(a + b + c)2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \le \frac{81}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \left(2^x + 2^y + 2^z\right)\left(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}\right) \le \frac{81}{8}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \ge \sqrt{y^2 + yz + z^2}, \ \forall x, y, z \in R.$$

(Bộ đề tuyển sinh,

Giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét hai vectơ :

$$\vec{a} = \left(x + \frac{y}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}y\right), \qquad \vec{b} = \left(-x - \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

Ta có : $\quad |\vec{a}| + |\vec{b}| = \sqrt{\left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2} + \sqrt{\left(x + \dfrac{z}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}z^2}$

$$\ge |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \ge \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab + bc + ca = abc \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \ge \sqrt{3}.$$

(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2000

Giải

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét ba vectơ :

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{a}; \frac{\sqrt{2}}{b}\right), \quad \vec{y} = \left(\frac{1}{b}; \frac{\sqrt{2}}{c}\right), \quad \vec{z} = \left(\frac{1}{c}; \frac{\sqrt{2}}{a}\right)$$

Khi đó : $|\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}}$

$$\geq |\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}$$

(vì : $ab + bc + ca = abc \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$)

Chú ý : Đây chính là bài 1b thuộc dạng 1 của chương này.

Bài 7. Chứng minh rằng : $-\frac{1}{4} \leq \frac{(a^2 - b^2)(1 - a^2b^2)}{\left[(1 + a^2)(1 + b^2)\right]^2} \leq \frac{1}{4}$, $\quad \forall a, b \in R$.

Giải

Đặt : $\begin{cases} a = \tan\alpha \\ b = \tan\beta \end{cases} \quad \left(\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{(a^2 - b^2)(1 - a^2b^2)}{\left[(1 + a^2)(1 + b^2)\right]^2} = \frac{(\tan^2\alpha - \tan^2\beta)(1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta)}{\left[(1 + \tan^2\alpha)(1 + \tan^2\beta)\right]^2}$$

$$= (\sin^2\alpha.\cos^2\beta - \sin^2\beta.\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)$$

$$= \sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta).\cos(\alpha + \beta).\cos(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(2\alpha + 2\beta).\sin(2\alpha - 2\beta) \quad \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right].$$

Bài 8. Chứng minh rằng :

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{2006 + x^2}.\sqrt{2006 + y^2}} + \frac{|y - z|}{\sqrt{2006 + y^2}.\sqrt{2006 + z^2}} \geq \frac{|z - x|}{\sqrt{2006 + z^2}.\sqrt{2006 + x^2}}.$$

Giải

Đặt : $\begin{cases} x = \sqrt{2006}.\tan\alpha \\ y = \sqrt{2006}.\tan\beta \\ z = \sqrt{2006}.\tan\gamma \end{cases} \quad \left(\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Suy ra : $\dfrac{|x - y|}{\sqrt{2006 + x^2}.\sqrt{2006 + y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2006}}\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha - \tan\beta)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2006}}.|\sin(\alpha - \beta)|$$

Chứng minh tương tự :

$$\frac{|y - z|}{\sqrt{2006 + y^2}.\sqrt{2006 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2006}}.|\sin(\beta - \gamma)|$$

$$\frac{|z - x|}{\sqrt{2006 + z^2}.\sqrt{2006 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2006}}.|\sin(\gamma - \alpha)|$$

BĐT $\Leftrightarrow$ $|\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \geq |\sin(\alpha - \gamma)|$ (1)

Ta có : $|\sin(\alpha - \beta)| = |\sin(\alpha - \beta + \beta - \gamma)|$

$$= |\sin(\alpha - \beta).\cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma).\cos(\alpha - \beta)|$$

$$\leq |\sin(\alpha - \beta)|.|\cos(\beta + \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma)|.|\cos(\alpha - \beta)|$$

$$\leq |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)|$$

$\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $a^2 + b^2 \leq 1$. Chứng minh rằng :

$$(ac + bd - 1)^2 \geq (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

2. Cho $\begin{cases} 0 \leq a \leq b \leq c \\ 0 < x, y, z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $(ax + by + cz)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{c}{z}\right) \leq \dfrac{(a + c)^2}{4ac}(x + y + z)^2$

b) $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$

(Học viện Quan hệ Quốc tế năm 1997)

3. Cho $\begin{cases} 0 \leq a, b, c \leq 2 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

b) $19a^2 + 54b^2 + 16c^2 + 36ab - 16ac - 24bc \geq 0$.

4. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $1 + \frac{x^2}{2} \geq \cos A + x(\cos B + \cos C)$, $\forall x \in R$

b) $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C \leq \frac{9}{8} + \frac{1}{4}(\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$

(ĐH An ninh)

5. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

a) $2yz.\cos A + 2zx.\cos B + 2xy.\cos C \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \forall x, y, z \in R.$

b) $\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \leq 4$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ")

6. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 - 2yx + 2y^2} + \sqrt{x^2 - 2zx + 2z^2} \geq \sqrt{(y-z)^2 + (|y| + |z|)^2} \quad \forall x, y, z \in R.$$

7. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$

$\forall x, y \in R$

b) $\left| \sqrt{(x+y)^2 + 1 + x + y} - \sqrt{(x+y)^2 + 1 - x - y} \right| < 1 \quad \forall x, y \in R$

c) $\left| x^3 + y^3 + \frac{1}{8} - \frac{3}{2}xy \right| \leq 1 \quad \forall x, y, \in R$ thỏa $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

d) $\sqrt{y^2 + x^2 - yx\sqrt{2}} + \sqrt{z^2 + x^2 - zx\sqrt{2}} \geq 1 \ \forall x, y, z \in R$ thỏa $y^2 + z^2 = 1$.

8. Chứng minh rằng : $(1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n, \ \forall |x| \leq 1, \forall n \in N.$

9. **a)** Cho $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geq 6 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $xz \leq 3$.

b) Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

(Đề thi Đại học và Cao đẳng khối A năm 2003)

10. Cho $a_1 < a_2 < ... < a_{13}$. Chứng minh rằng :

$$\exists a_k, a_l \ (1 \le k, l \le 13) \quad \text{sao cho : } 0 < \frac{a_k - a_l}{1 + a_k + a_l} < \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

11. a) Cho $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n \in R$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \ge$$

$$\ge \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + ... + b_n)^2}$$

b) Cho ΔABC có a, b, c là độ dài các cạnh và h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao. Gọi S là diện tích của ΔABC. Dùng kết quả câu a), hãy chứng minh rằng :

- $h_a \le \frac{1}{2}\sqrt{(a + b + c)(-a + b + c)}$
- $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le \frac{1}{4}(a + b + c)^2$
- $\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B} + \sqrt{\sin^2 B + \sin^2 C} + \sqrt{\sin^2 C + \sin^2 A} \ge$

$$\ge \sqrt{2}(\sin A + \sin B + \sin C).$$

DẠNG 4 : DÙNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN ĐỂ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của $y = \sin^6 x.\cos^6 x$.

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$1 = \sin^2 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3} \ge 4\sqrt[4]{\frac{\sin^6 x.\cos^6 x}{27}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \ge \frac{4^4}{27}.y \quad \Rightarrow \quad y \le \frac{27}{256}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{\cos^2 x}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in Z$$

Vậy : $Max(y) = \frac{27}{256}$.

Bài 2. Cho $\begin{cases} a, b, c \ge 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $y = a^{30}.b^{4}.c^{2002}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$1 = \underbrace{\frac{a}{30} + \ldots + \frac{a}{30}}_{30 \text{ số } \frac{a}{30}} + \underbrace{\frac{b}{4} + \ldots + \frac{b}{4}}_{4 \text{ số } \frac{b}{4}} + \underbrace{\frac{c}{2002} + \ldots + \frac{c}{2002}}_{2002 \text{ số } \frac{c}{2002}}$$

$$\ge 2036\sqrt[2036]{\frac{a^{30}.b^{4}.c^{2002}}{30^{30}.4^{4}.2002^{2002}}}$$

$$\Rightarrow \quad y = a^{30}.b^{4}.c^{2002} \le \frac{30^{30}.4^{4}.2002^{2002}}{2036^{2036}}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ \dfrac{a}{30} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{2002} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{30}{2036} \\ b = \dfrac{4}{2036} \\ c = \dfrac{2002}{2036} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Max}y = \frac{30^{30}.4^{4}.2002^{2002}}{2036^{2036}}.$$

Bài 3. Cho $x \ge y,\ z > 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{x}{y} + \sqrt{1 + \dfrac{y}{z}} + \sqrt[3]{1 + \dfrac{z}{x}}$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy (2 lần) :

$$A = \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}} \ge \frac{x}{y} + \sqrt{2}.\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} + 4\sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6\sqrt[6]{\frac{z}{x}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\frac{x}{y} + \underbrace{\left(\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}}\right)}_{< 0}\sqrt[6]{\frac{z}{x}}$$

$$A \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}.11\sqrt[11]{\frac{x}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}} + 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ Vậy : $\text{MinT} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

Bài 4. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{x^2}{x+y} + \dfrac{y^2}{y+z} + \dfrac{z^2}{z+x}$.

(Tạp chí Toán học Nga)

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

- $1 = \sqrt{x}.\sqrt{y} + \sqrt{y}.\sqrt{z} + \sqrt{z}.\sqrt{x}$

$$\leq \sqrt{x+y+z}.\sqrt{y+z+x} = x + y + z \qquad (1)$$

- $(x+y+z)^2 = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x+y}}.\sqrt{x+y} + \dfrac{y}{\sqrt{y+z}}.\sqrt{y+z} + \dfrac{z}{\sqrt{z+x}}.\sqrt{z+x}\right)^2$

$$\leq T\,(x+y+y+z+z+x) \leq 2(x+y+z)T$$

$$\Rightarrow \quad T \geq \frac{x+y+z}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $T \geq \dfrac{1}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{3}$ Vậy : $\text{MinT} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 5. Cho $x \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x}.$$

(ĐH An ninh năm 1999)

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

- $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x+1-x} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$

$$\leq \sqrt{2}.\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \leq \sqrt{2}.\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \quad y \le \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ Vậy : $\text{Max}y = \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$.

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm minQ, $Q = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \dfrac{1}{c}\right)^2$.

Giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

- $1 = (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 \ge \dfrac{1}{3}$ (1)
- $9 = \left(\sqrt{a}\,\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b}\,\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c}\,\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \le \underbrace{(a + b + c)}_{1}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

$$\le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge 27$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \quad Q = (a^2 + b^2 + c^2) + \left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) + 6$

$$\ge \frac{1}{3} + 27 + 6 \ge 33 + \frac{1}{3} = \frac{100}{3}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$ Vậy : $\text{Min}Q = \dfrac{100}{3}$.

Bài 7. Cho ΔABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{a^2}{bc}\cos A + \frac{b^2}{ca}\cos B + \frac{c^2}{bc}\cos C.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002)

Giải

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$

Do ΔABC nhọn $\Rightarrow \begin{cases} a^2 \ge b^2 \ge c^2 \\ \sin 2A \le \sin 2B \le \sin 2C \end{cases}$

Theo BĐT Trêbưsếp :

$$P = \frac{a^2}{bc}\cos A + \frac{b^2}{ca}\cos B + \frac{c^2}{bc}\cos C$$

$$= \frac{1}{4S}.(a^2.\sin 2A + b^2.\sin 2B + c^2.\sin 2C)$$

$$\le \frac{1}{4S}.\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$\le \frac{1}{12S}.(a^2+b^2+c^2).4\sin A.\sin B.\sin C$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{6R^2} \quad (\text{vì } S = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C)$$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}_{\left(\le \frac{9}{4}\ ?\right)} \le \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều. Vậy : MaxP $= \frac{3}{2}$.

Bài 8. Cho $\begin{cases} a+b=2 \\ a, b \ge 0 \end{cases}$. Tìm Miny, $y = a^{2007} + b^{2007}$.

Giải

Theo bất đẳng thức Bernoulli :

$$+\ \begin{array}{l} a^{2007} = [1+(a-1)]^{2007} \ge 1 + 2007(a-1) \\ b^{2007} = [1+(b-1)]^{2007} \ge 1 + 2007(b-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y \ge 2 + 2005(a+b-2) = 2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = 1$ Vậy : Miny = 2.

Bài 9. Cho $|x| \le 1$. Tìm Miny với $y = (1-x)^n + (1+x)^n$

($2 \le n \in Z$ là hằng số cho trước).

Giải

Theo bất đẳng thức Bernoulli :

$(1+x)^n \ge 1 + nx$ Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$

$(1-x)^n \ge 1 - nx$ Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow y \ge 2$ Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy : Miny = 2.

Bài 10. Cho x, y, z $\in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y}.$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2006)

Giải

- Do x, y, z $\in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow \begin{cases} x+y \ge 1 \\ y+z \ge 1 \\ z+x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z \ge 1+z \\ x+y+z \ge 1+y \\ x+y+z \ge 1+x \end{cases}$

$$\Rightarrow P \ge \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} = 2.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{2}$. Vậy : MinP = 2.

- Do $x, y, z \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$

$$\Rightarrow P = \frac{x+y}{1+z} + \frac{y+z}{1+x} + \frac{z+x}{1+y} = \frac{x}{1+z} + \frac{y}{1+z} + \frac{y}{1+x} + \frac{z}{1+x} + \frac{z}{1+y} + \frac{x}{1+y}$$

$$\le \left(\frac{x}{x+z} + \frac{z}{z+x}\right) + \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y}\right) + \left(\frac{y}{y+x} + \frac{x}{x+y}\right) = 3.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z = 1$. Vậy : MaxP = 3.

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $\begin{cases} x, y, z \ge 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Hãy tìm :

a) Max (xyz) **b)** Max (xy^2z^3) **c)** Min $(x^3 + y^3 + z^3)$.

2. Cho $\begin{cases} x, y, z, t \ge 0 \\ x + y + z + t = \varphi \end{cases}$. Hãy tìm :

a) Min $(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$ **b)** Max $(xyzt)$.

3. Cho $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x, y, z \ge 0 \end{cases}$. Tìm MinT với $T = x^{2006} + y^{2006} + z^{2006}$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của :

a) $y = \dfrac{2\sin x + 3\cos x + 5}{5\sin x + 6\cos x + 11}$

b) $y = \dfrac{\sin 2x + a}{\sin 2x + \cos 2x + a}$ (a là hằng số > 2).

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

a) $y = \dfrac{\sqrt{x - 2004}}{x}$ (với $x \ge 2004$)

b) $y = \dfrac{yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3} + xy\sqrt{z-4}}{xyz}$ (với $x \ge 2$, $y \ge 3$, $z \ge 4$).

6. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ ab = 1 \end{cases}$. Tìm Min$\left(\dfrac{a^3}{1+b} + \dfrac{b^3}{1+a}\right)$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2003)

7. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng : $|a| + |b| + |c| \ge |a + b + c|$

b) Nếu thêm điều kiện $a + b + c = 2004$, hãy tìm minP với :

$$P = |a - 3| + |b - 3| + |c - 3|.$$

8. **a)** Cho $xy + yz + zx = 1$ và a là hằng số dương.

Hãy tìm $\min[a^2(x^2 + y^2) + z^2]$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

b) Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3 \end{cases}$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{(ab + bc + ca)^2}$.

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2006)

9. Cho $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của $P = xy$ và $Q = x^2 + y^2$.

10. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{1}{1+d} \ge 3 \end{cases}$. Tìm Max(abcd).

11. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = \dfrac{bc}{a^2b + a^2c} + \dfrac{ca}{b^2c + b^2a} + \dfrac{ab}{c^2a + c^2b}$.

(ĐH Nông nghiệp 1 năm 2000)

12. **a)** Hãy xác định ΔABC để $p = \dfrac{\sqrt[5]{\sin A} + \sqrt[5]{\sin B} + \sqrt[5]{\sin C}}{\sqrt[5]{\cos\dfrac{A}{2}} + \sqrt[5]{\cos\dfrac{B}{2}} + \sqrt[5]{\cos\dfrac{C}{2}}}$ lớn nhất.

(ĐH Bách khoa Hà Nội năm 2000)

b) Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \ldots, a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1 \end{cases}$ $(2 \le n \in Z)$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$M = \frac{a_1^2}{1 - a_1} + \frac{a_2^2}{1 - a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{1 - a_n} + \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2002)

c) Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(3 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(3 + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right).$$

(Tạp chí "Toán học & Tuổi trẻ" năm 2006)

Phụ lục 1

GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI CHÍNH THỨC OLYMPIC 30 – 4 (Khối 10) CÁC NĂM HỌC TỪ 2000 ĐẾN 2006

A. NĂM 2000

Bài 1. Giải hệ : $\begin{cases} \left(3 - \dfrac{5}{y + 42x}\right).\sqrt{2y} = 4 \\ \left(3 + \dfrac{5}{y + 42x}\right).\sqrt{x} = 2. \end{cases}$

Bài 2. Giải phương trình : $2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0.$

Bài 3. Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi Toán mang số kí danh trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng tỏ rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số kí danh được mang chia hết cho 9.

Bài 4. Cho tứ giác lồi ABCD có $\widehat{BAD} > 90^0$. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm nằm trên BC và CD sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{NAB} = 90^0$. Chứng minh rằng nếu MN và BD cắt nhau tại I thì $IA \perp AC$.

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c \ge 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm k lớn nhất sao cho :

$$a^3 + b^3 + c^3 + k.abc \ge \frac{1}{9} + \frac{k}{27} \text{ đúng } \forall a, b, c \text{ thỏa điều kiện trên.}$$

Hướng dẫn giải

Bài 1. Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \dfrac{5}{y + 42x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}} & (1) \\ 3 + \dfrac{5}{y + 42x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} = 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} = \dfrac{5}{y + 42x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{15}{y + 42x}$$

$\Leftrightarrow \quad (y - 2x)(y + 42x) = 15xy \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 40xy - 84x^2 = 15xy$

$\Leftrightarrow \quad y^2 - 84x^2 + 25xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - 3x)(y + 28x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 3x \quad$ (vì x, y > 0)

Thay y = 30 vào (2), ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}} = \frac{5}{45x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{9x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1}{3\sqrt{3}.\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{27}$$

Vậy : $\begin{cases} x = \dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{27} \\ y = \dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{9}. \end{cases}$

Bài 2.

Ph.trình $\Leftrightarrow \quad 2\sin 2x - 2\sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left[\sin 2x - \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \frac{3}{2}\right] - \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - t^2 - \sqrt{2}t - \frac{3}{2}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 = 0$$

(với $t = \sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$)

$$\Leftrightarrow \quad \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left[1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình này vô nghiệm (vì : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \forall\alpha \in R$)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 3.

a) Xét 5 số tự nhiên tùy ý, khi chia cho 3 có thể xảy ra :

+ Có 3 số dư giống nhau ⇒ tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3

+ Trái lại, số có 3 số dư đôi một khác nhau ⇒ tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3

Vậy trong 5 số tự nhiên bất kì, luôn tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3.

b) Xét 17 số tự nhiên tùy ý :

Chia chúng thành 3 tập, có lần lượt 5, 5, 7 phần tử. Trong mỗi tập, chọn được 3 số có tổng lần lượt là : $3a_1$, $3a_2$, $3a_3$ ($a_1, a_2, a_3 \in N$)

Còn lại : $17 - 9 = 8$ số

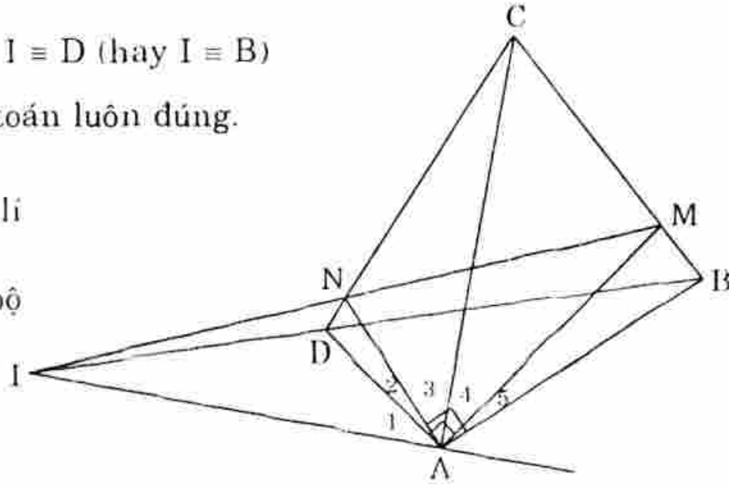
Trong 8 số này, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$ ($a_4 \in N$), còn lại 5 số, chọn tiếp 3 số có tổng là a_5 ($a_5 \in N$).

Trong 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có 3 số a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} có tổng chia hết cho 3.

⇒ Ta có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số kí danh là :

$$3a_{i1} + 3a_{i2} + 3a_{i3} = a(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) \vdots 9$$

Bài 4.



- Nếu $M \equiv C$ (hay $N \equiv C$) thì $I \equiv D$ (hay $I \equiv B$)

  Trong trường hợp này bài toán luôn đúng.

- Nếu $\begin{cases} I \not\equiv B \\ I \not\equiv D \end{cases}$ thì theo định lí Ménélaus cho ΔBCD với bộ 3 điểm M, N, I ta có :

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{ID}{IB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} \cdot \frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta AND}} \cdot \frac{S_{\Delta AID}}{S_{\Delta AND}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}AB.AM.\sin A_5}{\frac{1}{2}AC.AM.\sin A_4} \cdot \frac{\frac{1}{2}AC.AN.\sin A_3}{\frac{1}{2}AN.AD.\sin A_2} \cdot \frac{\frac{1}{2}AI.AD.\sin A_1}{\frac{1}{2}AI.AB.\sin \widehat{IAB}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin A_5 . \sin A_3 . \sin A_1 = \sin A_4 . \sin A_2 . \sin \widehat{IAB}$$

$\Leftrightarrow \quad \sin A_3 . \sin A_1 = \cos(A_4 + A_2) . \cos(A_1 + A_2)$

$$\left(\text{vì}: \begin{cases} A_2 = A_5 \\ A_3 + A_4 + A_5 = 90^0 \\ A_2 + A_3 + A_1 = 90^0 \end{cases} \right)$$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A_1 - A_3) - \cos(A_1 + A_3) = \cos(A_1 - A_3) + \cos(A_1 + 2A_2 + A_3)$

$\Leftrightarrow \quad \cos(A_1 + 2A_2 + A_3) + \cos(A_1 + A_3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(A_1 + A_2 + A_3).\cos A_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A_1 + A_2 + A_3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad A_1 + A_2 + A_3 = 90^0 \quad \Leftrightarrow \quad IA \perp AC.$

Bài 5. Chọn $\begin{cases} a = b = \dfrac{1}{2}, \\ c = 0 \end{cases}$ ta có : $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} \geq \dfrac{1}{8} + \dfrac{k}{27} \Leftrightarrow k \leq \dfrac{15}{4}$

Ta chứng minh rằng $k_{max} = \dfrac{15}{4}$, tức là chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4}abc \geq \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Quả vậy, ta luôn có : $abc \geq (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c), \forall a, b, c \geq 0$

(Bạn đọc tự chứng minh)

Hơn nữa : $a + b + c = 1 \Rightarrow abc \geq (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c)$

$\Leftrightarrow \quad abc \geq 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8abc$

$\Leftrightarrow \quad 9abc - 4(ab + bc + ca) + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{17}{4}abc - 3(ab + bc + ca) + \dfrac{3}{4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)^3 - 3(ab + bc + ca)(a + b + c) + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)[(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)] + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + \dfrac{27}{4}abc \geq \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 + \dfrac{15}{4}abc \geq \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad (1)$ đúng

Vậy : $k_{max} = \dfrac{15}{4}$ là kết quả cần tìm.

B. NĂM 2001

Bài 1. Tìm 3 số tự nhiên đôi một khác nhau và lớn hơn 1 thỏa điều kiện : Tích hai số bất kì trong 3 số ấy cộng với 1 chia hết cho số thứ ba.

Bài 2. Cho x, y, z ∈ [1; 2]. Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Bài 3. Giải phương trình : $64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 2\sqrt{1 - x^2}$ (1)

Bài 4. Trên đường tròn (O; R) cho 5 điểm phân biệt A, B, C, D, E theo thứ tự đó, sao cho AB = BC = DE = R. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AE. Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của chu vi ΔBMN.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Giả sử a, b, c ∈ N và $2 \le a < b < c$ thỏa : $\begin{cases} ab + 1 \,\vdots\, c \\ bc + 1 \,\vdots\, a \\ ca + 1 \,\vdots\, b \end{cases}$

$\Rightarrow \quad (ab + 1)(bc + 1)(ca + 1) \,\vdots\, abc$

$\Rightarrow \quad 1 + (ab + bc + ca) + abc(a + b + c) + (abc)^2 \,\vdots\, abc$

$\Rightarrow \quad 1 + (ab + bc + ca) \,\vdots\, abc \quad \Rightarrow \quad 1 + ab + bc + ca \ge abc$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \ge 1$$

Nếu $b \ge 4 \quad \Rightarrow \quad c \ge 5$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{abc} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{40} = \frac{39}{40} < 1$$

$\Rightarrow$ Vô lí

Vậy $3 \le b < 4 \quad \Rightarrow \quad b = 3, \quad a = 2$

Từ $ab + 1 = 7 \,\vdots\, c \Rightarrow c = 7$

Thử lại : (a, b, c) = 2, 3, 7) thỏa điều kiện đề bài.

Bài 2. Do x, y, z có vai trò như nhau, nên ta có thể xem $1 \le x < y \le z \le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) \ge 0 \\ \left(1 - \frac{y}{x}\right)\left(1 - \frac{z}{y}\right) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\left(1 - \frac{z}{y}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{z} + 1 - \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) + \frac{z}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \leq 2 + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad P = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$$

$$\leq 5 + 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \qquad (1)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = z \end{array}\right.$

Hơn nữa : $\frac{x}{z} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ $\left(\text{vì} : 1 \leq x \leq y \leq z \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \leq 1 \\ 2x \geq 2 \geq z \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{z} \leq 1 \\ \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2} \end{cases}\right)$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{z} - 2\right)\left(\frac{x}{z} - \frac{1}{2}\right) \leq 0 \qquad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{z}\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{z} + 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{z}\right)^2 + 1 \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{z} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $P \leq 10$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = z = 2 \end{cases} \end{array}\right.$. Vậy MaxP = 10.

Bài 3. Ta có :

$\cos 7a = \cos(3a + 4a)$

$= \cos 3a.\cos 4a - \sin 3a.\sin 4a$

$= (4\cos^3 a - 3\cos a)(2\cos^2 2a - 1) - (3\sin a - 4\sin^3 a).4.\sin a.\cos a.\cos 2a$

$= (4\cos^3 a - 3\cos a)[2(2\cos^2 a - 1)^2 - 1] - 4(3\sin^2 a - 4\sin^4 a)\cos a.\cos 2a$

$= (4\cos^3 a - 3\cos a)(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1) - 4[3(1 - \cos^2 a) -$

$- 4(1 - \cos^2 a)^2].\cos a(2\cos^2 a - 1)$

$= (4\cos^3 a - 3\cos a)(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1)$

$\qquad - 4(5\cos^2 a - 1 - 4\cos^4 a)(2\cos^3 a - \cos a)$

$= 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a.$

Điều kiện : $-1 \le x \le 1 \Rightarrow x = \cos t,\ t \in [0; \pi]$

Vậy : PT (1) $\Leftrightarrow 64\cos^6 a - 112\cos^4 a + 56\cos^2 a - 7 = 2\sin t$

$\Leftrightarrow 64\cos^7 a - 112\cos^5 a + 56\cos^3 a - 7\cos a = \sin 2t$

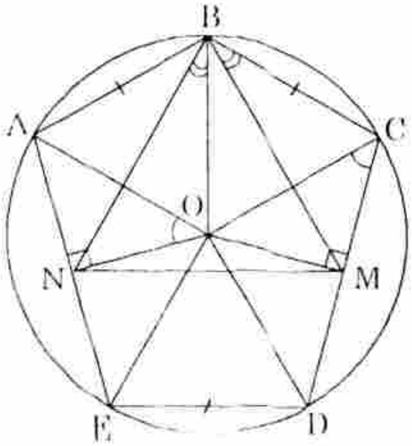
(với $t \ne \frac{\pi}{2}$)

$$\Leftrightarrow \cos 7a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{9} \\ t = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \ (k \in Z)$$

Do $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \Rightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{3\pi}{18}, \frac{7\pi}{10}\right\}$

Vậy : $x \in \left\{\cos\frac{\pi}{18}, \cos\frac{5\pi}{18}, \cos\frac{13\pi}{18}, \cos\frac{17\pi}{18}, \cos\frac{3\pi}{10}, \cos\frac{7\pi}{10}\right\}$.

Bài 4. Dễ thấy rằng : $\widehat{AOE} + \widehat{DOC} = 180^0$



Mà : $2\widehat{DCO} + \widehat{DOC} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{AOE} = 2\widehat{DCO} \Rightarrow \widehat{AON} = \widehat{MCO}$

$\Rightarrow \Delta NOA = \Delta MCO \Rightarrow ON = CM$

$\Rightarrow \Delta ONB = \Delta CNB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \begin{cases} BN = BM \\ \widehat{OBN} = \widehat{CBM} \end{cases}$

Mà $\widehat{OBC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{NBM} = 90^0 \Rightarrow \Delta BMN$ đều

Đặt : $\widehat{AON} = \alpha \in (0^0; 90^0)$

$\Rightarrow BN^2 = R^2 + ON^2 - 2R.ON.\cos(\alpha + 60^0)$

$= R^2 + R^2.\cos^2\alpha - 2R.R\cos\alpha.\cos(\alpha + 60^0)$

$= R^2 [1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha.\cos(\alpha + 60^0)]$

$= R^2 [1 + \cos^2\alpha - \cos\alpha(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)]$

$= R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right) \le R^2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2\left(1 + \sqrt{3}\right)^2}{4}$

$$\Rightarrow \quad BN \leq \frac{R(1+\sqrt{3})}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \quad \sin 2\alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 45^0$

Vậy : Chu vi ΔBMN lớn nhất là $\dfrac{3R(1+\sqrt{3})}{2}$ khi và chỉ khi $\widehat{AOE} = 90^0$.

C. NĂM 2002

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2002} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right). \end{cases}$$

Bài 2. Chứng minh rằng : Phần nguyên của $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}$ thì chia hết cho 2^{n+1} và không chia hết cho 2^{n+3} với mọi n là số tự nhiên.

Bài 3. Cho ΔABC thỏa : $\dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cot A + \cot B + \cot C} = \sqrt[3]{\dfrac{\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}}}$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Bài 4. Cho M nằm trong ΔABC sao cho : $\widehat{AMC} = 90^0$, $\widehat{AMB} = 150^0$ và $\widehat{BMC} = 120^0$. Gọi P, Q, R lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC, AMB và BMC. Chứng minh rằng : $S_{\Delta PQR} > S_{\Delta ABC}$.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Dễ thấy rằng :

Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_{2002})$ là nghiệm của hệ thì $x_1, x_2, \dots, x_{2002}$ cùng dấu và khác không. Đồng thời $(-x_1, -x_2, \dots, -x_{2002})$ cũng là nghiệm của hệ, nên ta chỉ cần xét với $x_1, x_2, \dots, x_{2002}$ dương.

Theo bất đẳng thức Cauchy : $x_i + \dfrac{1}{x_i} \geq 2$, $\quad \forall i = 1, 2, \dots, 2002$

Từ hệ suy ra : $x_i \geq 1$, $\quad \forall i = 1, 2, \dots, 2002$

Hơn nữa, cộng các phương trình của hệ vế với vế ta được :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2002} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2002}}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_{2002} = 1$$

Như vậy : $\left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 = \ldots = x_{2002} = 1 \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{2002} = -1 \end{array}\right.$ là 2 nghiệm cần tìm của hệ.

Bài 2. Ta có :

$$\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}\left(\sqrt{11}\right)^{2n+1-k}.3^{k}$$

$$\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}\left(\sqrt{11}\right)^{2n+1-k}.3^{k}(-1)^{k}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}\left(\sqrt{11}\right)^{2n+1-k}.3^{k}\left[1-(-1)^{k}\right]$$

$$= 2\left[C_{2n+1}^{1}.\left(\sqrt{11}\right)^{2n}.3 + C_{2n+1}^{3}.\left(\sqrt{11}\right)^{2n-2}.3^{3} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}.3^{2n+1}\right] \in N$$

Suy ra phần nguyên của $\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}$ là :

$$A_n = \left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1}\right] = \left(\sqrt{11}+3\right)^{2n+1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1}$$

(vì : $\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n+1} \in [0;1)$)

- Với $n = 0$: $A_0 = \left(\sqrt{11}+3\right)^{1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{1} = 6$ chia hết cho 2^{0+1} nhưng không chia hết cho 2^{0+2}.

- Với $n = 1$: $A_1 = \left(\sqrt{11}+3\right)^{3} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{3}$

$$= 6\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2} + \left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}-3\right) + \left(\sqrt{11}-3\right)^{2}\right]$$

$= 6.(40 + 2) = 2^2.\ 3^2.\ 7$ chia hết cho 2^{1+1} nhưng không chia hết cho 2^{1+2}.

- Giả sử tính chất này đúng với mọi số tự nhiên $k < n$, ta chứng minh tính chất này đúng với $k = n$.

Quả vậy :

$$A_n = \left[\left(\sqrt{11}+3\right)^2 + \left(\sqrt{11}-3\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right] -$$

$$- \left[\left(\sqrt{11}-3\right)^2\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1} - \left(\sqrt{11}+3\right)^2\left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right]$$

$$= 40\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-1} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-1}\right] - 4\left[\left(\sqrt{11}+3\right)^{2n-3} - \left(\sqrt{11}-3\right)^{2n-3}\right]$$

$$= 40\,A_{n-1} - 4A_{n-2}$$

$$= 5.\,2^3 A_{n-1} - 2^2.A_{n-2}$$

Mà : $\begin{cases} 2^3.A_{n-1} & \text{chia hết cho } 2^3.2^n = 2^{n+3} \\ 2^2.A_{n-2} & \text{chia hết cho } 2^2.2^{n-1} = 2^{n+1} \\ 2^2.A_{n-2} & \text{không chia hết cho } 2^2.2^n = 2^{n+2} \end{cases}$

Vậy : A_n chia hết cho 2^{n+1} nhưng không chia hết cho 2^{n+2}.

Bài 3. Gọi S, R lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có : $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$= b^2 + c^2 - 4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)\cot A$$

$$= b^2 + c^2 - 4S.\cot A$$

Chứng minh tương tự :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S\cot B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot C$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 4S.(\cot A + \cot B + \cot C)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cot A + \cot B + \cot C} = \frac{S}{R^2} \qquad (1)$$

Hơn nữa : $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$= (b-c)^2 + 4\left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right).\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$= (b-c)^2 + 4S.\tan\frac{A}{2} \geq 4S\tan\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin^2 A}{\tan\frac{A}{2}} \geq \frac{S}{R^2}$$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{\sin^2 B}{\tan\dfrac{B}{2}} \geq \dfrac{S}{R^2}$

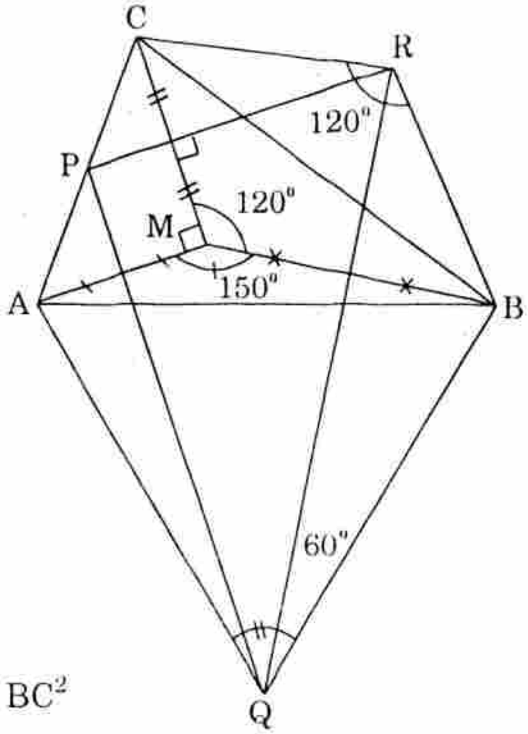
$$\dfrac{\sin^2 C}{\tan\dfrac{C}{2}} \geq \dfrac{S}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \dfrac{\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}{\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}} \geq \left(\dfrac{S}{R^2}\right)^3$$

Cùng với (1) suy ra :

$$\sqrt[3]{\dfrac{\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}{\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}}} \geq \dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cot A + \cot B + \cot C}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.



Bài 4.

Ta có : $\begin{cases} \text{A, M đối xứng nhau qua PQ} \\ \text{B, M đối xứng nhau qua QR} \\ \text{C, M đối xứng nhau qua RP} \end{cases}$

Khi đó : $\begin{cases} S_{\Delta MPQ} = S_{\Delta APQ} \\ S_{\Delta MQR} = S_{\Delta BQR} \\ S_{\Delta MPR} = S_{\Delta CPR} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2S_{\Delta PQR} &= S_{AQBRC} \\ &= S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABQ} + S_{\Delta BRC} \\ &= S_{\Delta ABC} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{12}BC^2 \\ &\geq S_{\Delta ABC} + \dfrac{1}{2}AB.BC \ \text{(Do BĐT Cauchy)} \\ &> S_{\Delta ABC} + \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{ABC} = 2S_{\Delta ABC} \end{aligned}$$

(Vì M nằm trong ΔABC và $\widehat{AMB} = 90^0 \Rightarrow 0 < \widehat{ABC} < 90^0$

$\Rightarrow 0 < \sin\widehat{ABC} < 1$)

$\Rightarrow \quad S_{\Delta PQR} > S_{\Delta ABC} \quad \Rightarrow \quad$ (ĐPCM).

D. NĂM 2003

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$

Bài 2. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường phân giác trong AA', BB', CC' cắt (O) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} \le \frac{9}{4}. \quad (1)$$

Bài 3. Cho : $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_{2003} \ge 0 & (a) \\ a_1 + a_2 + ... + a_{2003} = 2 & (b) \\ a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{2002}a_{2003} + a_{2003}a_1 = 1 & (c) \end{cases}$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : $S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2003}^2$.

Bài 4. Cho phương trình : $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n \quad (n \in N^*)$ (1)

a) Chứng minh rằng : Nếu phương trình có nghiệm nguyên (x, y) thì phương trình có ít nhất 3 nghiệm nguyên khác nhau.

b) Với n = 2003 phương trình trên có nghiệm nguyên hay không? tại sao?

Bài 5. Hãy tìm tất cả các tập hợp M gồm n số thực với n hữu hạn lớn hơn hoặc bằng 2 thỏa điều kiện :

với mọi số a, b thuộc M, a khác b, thì $\frac{2a}{3} - b^2$ cũng thuộc M ?

Bài 6. Cho hai đường tròn đồng tâm O, bán kính R_1, R ($R_1 > R$) và tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O, R). Tia AB, BC, CD, DA cắt đường tròn (O, R_1) lần lượt tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng :

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \ge \left(\frac{R_1}{R}\right)^2.$$

Hướng dẫn giải

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - x^2) = 2x \\ z(1 - y^2) = 2y \\ x(1 - z^2) = 2z \end{cases}$ (1)

Vì một trong các giá trị x, y, z bằng ±1 đều không thỏa hệ phương trình (1) nên $x \ne \pm 1$, $y \ne \pm 1$, $z \ne \pm 1$

Suy ra hệ phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} & (2) \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} & (3) \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} & (4) \end{cases}$

Đặt : $x = \tan a$, $a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Từ (2) $\Rightarrow$ $y = \tan 2a$

Từ (3) $\Rightarrow$ $z = \tan 4a$

Từ (4) $\Rightarrow$ $x = \tan 8a$

$\Rightarrow$ $\tan 8a = \tan a$ $\Leftrightarrow$ $a = \dfrac{k\pi}{7}, k \in Z$

Với phép thử, ta được $k \in \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$

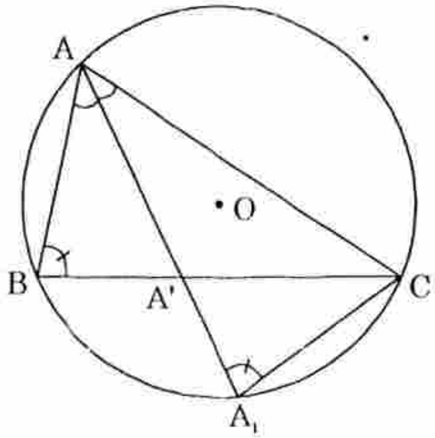
Vậy hệ đã cho có 7 nghiệm :

$\left(-\tan\dfrac{3\pi}{7}, -\tan\dfrac{6\pi}{7}, -\tan\dfrac{12\pi}{7}\right)$, $\left(-\tan\dfrac{2\pi}{7}, -\tan\dfrac{4\pi}{7}, -\tan\dfrac{8\pi}{7}\right)$,

$\left(-\tan\dfrac{\pi}{7}, -\tan\dfrac{2\pi}{7}, -\tan\dfrac{4\pi}{7}\right)$, (0, 0, 0), $\left(\tan\dfrac{\pi}{7}, \tan\dfrac{2\pi}{7}, \tan\dfrac{3\pi}{7}\right)$,

$\left(\tan\dfrac{2\pi}{7}, \tan\dfrac{4\pi}{7}, \tan\dfrac{8\pi}{7}\right)$, $\left(\tan\dfrac{3\pi}{7}, \tan\dfrac{6\pi}{7}, \tan\dfrac{12\pi}{7}\right)$.

Bài 2. Đặt : BC = a, CA = b, AB = c



Ta có : $\Delta ABA' \backsim \Delta AA_1C$

$\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{AA_1} = \dfrac{AA'}{AC}$

$\Rightarrow$ $AA_1.AA' = bc$

$\Rightarrow$ $\dfrac{AA'}{AA_1} = \dfrac{AA'^2}{AA_1.AA'} = \dfrac{AA'^2}{bc}$

Mà : $AA' = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$ (với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$)

$\Rightarrow$ $AA'^2 = \dfrac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AA'}{AA_1} = 1 - \dfrac{a^2}{(b+c)}$

Chứng minh tương tự : $\dfrac{BB'}{BB_1} = 1 - \dfrac{b^2}{(c+a)^2}$

$$\dfrac{CC'}{CC_1} = 1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \dfrac{AA'}{AA_1} + \dfrac{BB'}{BB_1} + \dfrac{CC'}{CC_1} = 3 - \left[\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

Hơn nữa, theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2 = \left[\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] + \left[\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] +$$

$$+ \left[\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right] - \dfrac{3}{4}$$

$$\geq \quad \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} - \dfrac{3}{4}$$

$$\geq \quad \left(\dfrac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\dfrac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\dfrac{c}{a+b} + 1\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\geq \quad \dfrac{1}{2}\left[(a+b) + (b+c) + (c+a)\right]\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\geq \quad \dfrac{9}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \geq \dfrac{3}{4}$$

Vậy : $\dfrac{AA'}{AA_1} + \dfrac{BB'}{BB_1} + \dfrac{CC'}{CC_1} \leq 3 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{4}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý : Nếu AA', BB', CC' là các trung tuyến thì kết quả (1) vẫn còn đúng. Đây chính là đề thi đề nghị Olympic 30 – 4 lần VIII năm 2002 của Trường THPT Nguyễn Du TP.HCM.

Bài 3. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_{2003} = \min\{a_i \,/\, i = 1, 2, ..., 2003\}$ và $a_1 > 0$.

Từ giả thiết ta có :

$$\begin{aligned} 4 &= (a_1 + a_2 + ... + a_{2003})^2 \\ &\geq (a_1 + a_2 + ... + a_{2003})^2 - (a_1 - a_2 + a_3 - ... + a_{2003})^2 \\ &\geq 4(a_1 + a_3 + ... + a_{2003})\,(a_2 + a_4 + ... + a_{2002}) \end{aligned}$$

$\geq\ 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2002}a_{2003}) + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + \ldots + a_{2000}a_{2003}) +$

$+ 4a_1\,(a_6 + a_8 + \ldots + a_{2002})$

$\geq\ 4(1 - a_{2003}a_1) + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + \ldots + a_{2000}a_{2003}) +$

$+ 4a_1\,(a_6 + a_8 + \ldots + a_{2002})$

$\geq\ 4 + 4(a_1a_4 + a_2a_5 + \ldots + a_{2000}a_{2003}) + 4a_1(a_6 + a_8 + \ldots + a_{2002} - a_{2003})$

$\geq\ 4$

Do đó ta phải có : $\begin{cases} a_1 + a_3 + \ldots + a_{2003} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2002} = 1 & (1) \\ a_1a_4 = a_2a_5 = \ldots = a_{2000}a_{2003} = 0 & (2) \\ a_6 + a_8 + \ldots + a_{2002} = a_{2003} & (3) \end{cases}$

Vì $a_1 > 0$ nên $a_4 = 0$ (do (2))

Vì $a_{2003} = \min\{a_i / i = 1, 2, \ldots, 2003\}$ nên $a_{2003} = 0$

Do đó : $a_6 = a_8 = \ldots = a_{2002} = 0$ (do (3))

Từ (1) suy ra $a_2 = 1$ và từ (c) ta có $a_1 + a_3 = 1$

Thay các kết quả trên vào (b) ta có $a_4 + a_5 + \ldots + a_{2003} = 0$

Suy ra : $a_4 = a_5 = \ldots = a_{2003} = 0$

Như vậy : $S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + 1 + (1 - a_1)^2 = 2 + \underbrace{2a_1(a_1 - 1)}_{\leq 0}$

$$= 2\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

Từ đây ta suy ra ngay : $\max S = 2$ và $\min S = \dfrac{3}{2}$.

Bài 4.

a) Ta có : $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 + (-x)^3$

Và $x^3 - 3xy^2 + y^3 = (-y)^3 - 3(-y)(x - y)^2 + (x - y)^3$

Vì vậy : Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên (x, y) thì phương trình (1) có thêm hai nghiệm nguyên nữa là $(y - x, -x)$ và $(-y, x - y)$.

Và ba nghiệm trên là phân biệt vì nếu có hai nghiệm bằng nhau thì dẫn đến $(x, y) = (0, 0)$ trái với giả thiết $n > 0$.

b) Giả sử phương trình : $x^3 - 3xy^2 + y^2 = 2003$ (2) có nghiệm nguyên (x, y)

Ta có : $2003 \equiv -1 \pmod 3$

$\Rightarrow\quad x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv x^3 + y^3 \equiv -1 \pmod 3$

$\Rightarrow\quad x + y = -1 \pmod 3$

Do đó ta có các trường hợp :

* $x \equiv 0, y \equiv -1 \pmod 3$ hoặc $x \equiv -1, y \equiv 0$

$\Rightarrow$ $x^3 - 3xy^2 + y^3 \equiv -1 \pmod 9$

Mặt khác : $2003 \equiv 5 \pmod 9$ $\Rightarrow$ Vô lí

* $x \equiv 1, y \equiv 1 \pmod 3$ $\Rightarrow$ Vô lí.

Do $(y - x, -x)$ cũng là nghiệm nguyên của (2) nên trở lại trường hợp $x \equiv 0, y \equiv -1 \pmod 3$ ở trên.

Vậy phương trình (2) luôn vô nghiệm.

Bài 5. Nhận xét : $0 \notin M$ vì nếu không M sẽ chứa vô hạn các phần tử dạng $\left(\frac{2}{3}\right)^k a$ $(k \in N^*, a \in M \setminus \{0\})$

Hơn nữa, M có chứa phần tử âm. Thật vậy, nếu tất cả các phần tử của M đều dương thì tồn tại một phần tử nhỏ nhất của M, ta gọi là b sao cho $\forall c$ thuộc M ta có :

$$\frac{2b}{3} - c^2 \geq b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{3} + c^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Vô lí.}$$

Đặt $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ là tất cả các số âm của M. Ta có :

$$\frac{2a_1}{3} - a_2^2 < \frac{2a_1}{3} - a_3^2 < \ldots < \frac{2a_1}{3} - a_k^2 < \frac{2a_2}{3} - a_3^2 < \ldots < \frac{2a_2}{3} - a_k^2$$

Dãy này có $2k - 3$ số âm khác nhau của M. Do đó :

$$2k - 3 \leq k \quad \Leftrightarrow \quad k \leq 3$$

- Xét $k = 3$:

Ta có : $\frac{2a_1}{3} - a_2^2 < \frac{2a_1}{3} - a_3^2 < \frac{2a_2}{3} - a_3^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2a_1}{3} - a_2^2 = a_1 \\ \frac{2a_1}{3} - a_3^2 = a_2 \\ \frac{2a_2}{3} - a_3^2 = a_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ này vô nghiệm (Bạn đọc tự kiểm tra)

$\Rightarrow$ $k = 3$ không thỏa yêu cầu bài toán.

- Xét $k = 2$:

Ta có : $\frac{2a_1}{3} - a_2^2$ và $\frac{2a_2}{3} - a_1^2 \in M$

\+ Nếu $\frac{2a_1}{3} - a_2^2 = \frac{2a_2}{3} - a_1^2 = a_1$ (hoặc $= a_2$)

$\Rightarrow$ $a_1 + a_2 = -\frac{2}{3}$ và $a_1 = -3a_2^2$ (hoặc $a_2 = -3a_1^2$)

$\Rightarrow$ Hệ này vô nghiệm (Bạn đọc tự kiểm tra)

$\Rightarrow$ $k = 2$ không thỏa yêu cầu bài toán.

\+ Nếu $\frac{2a_1}{3} - a_2^2 \neq \frac{2a_2}{3} - a_1^2$ thì $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{2a_1}{3} - a_2^2 = a_1 \\ \frac{2a_2}{3} - a_1^2 = a_2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a_2 - a_2^2 = a_2 \\ \frac{2a_2}{3} - a_1^2 = a_1 \end{cases} \end{array}\right.$

Các hệ này cũng vô nghiệm.

- Xét $k = 1$:

M chỉ chứa một số âm, ta gọi là a.

Nếu b và c là hai số dương phân biệt của M thì $\frac{2a}{3} - b^2$ và $\frac{2a}{3} - c^2$ là hai số âm phân biệt của M $\Rightarrow$ loại.

Do đó M chỉ chứa một số dương, ta gọi là b. Như vậy : $M = \{a, b\}$

Ta có : $\frac{2}{3}a - b^2 < 0 \Rightarrow \frac{2}{3}a - b^2 = a \Rightarrow a = -3b^2$

$\Rightarrow$ $\frac{2}{3}b - a^2 = \frac{2}{3}b - 9b^4 = \left[\begin{array}{l} a = -3b^2 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \\ b \text{ (loại)} \end{array}\right.$

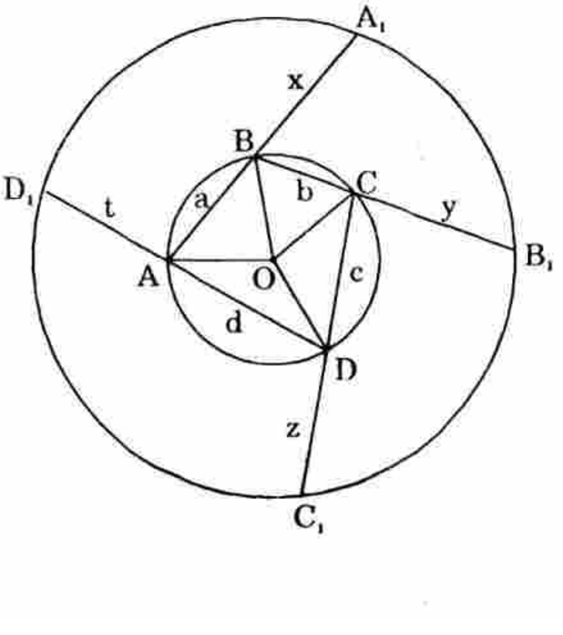
$\Rightarrow$ $M = \{a, b\} = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Bài 6. Đặt : $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$, $DA = d$

$A_1B = x$, $B_1C = y$,

$C_1D = z$, $D_1A = t$



Ta có :

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{S_{A_1B_1B}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{B_1C_1C}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{C_1D_1D}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{D_1A_1A}}{S_{ABCD}}$$

$$= 1 + \frac{x(b+y)}{ab+cd} + \frac{y(c+z)}{ad+bc} + \frac{z(d+t)}{ab+cd} + \frac{t(a+x)}{ad+bc}$$

$$= 1 + \frac{xy(b+y)}{y(ab+cd)} + \frac{yz(c+z)}{z(ad+bc)} + \frac{zt(d+t)}{t(ab+cd)} + \frac{tx(a+x)}{x(ad+bc)}$$

$$\geq 1 + \frac{x(R_1^2 - R^2)}{y(4R^2)} + \frac{y(R_1^2 - R^2)}{z(4R^2)} + \frac{z(R_1^2 - R^2)}{t(4R^2)} + \frac{t(R_1^2 - R^2)}{x(4R^2)}$$

(vì : $ab + cd,\ ad + bc \leq 4R^2$) (Bạn đọc xem ở phần chú ý)

$$\geq 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1^2}{R^2} - 1\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1^2}{R^2} - 1\right).4\sqrt[4]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{t}\cdot\frac{t}{x}} \quad \text{(Do BĐT Cauchy)}$$

$$\geq \frac{R_1^2}{R^2}$$

$\Rightarrow \dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \left(\dfrac{R_1}{R}\right)^2$. Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.

Chú ý : Đặt : $\widehat{AOB} = 2\alpha$, $\widehat{BOC} = 2\beta$, $\widehat{COD} = 2\gamma$, $\widehat{DOA} = 2\delta$

Suy ra : $0 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta$ và $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$

Do đó : $ab + cd = 4R^2(\sin\alpha.\sin\beta + \sin\gamma.\sin\delta)$

$$= 2R^2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\gamma - \delta) - \cos(\gamma + \delta)]$$

$$= 2R^2[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta) - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\gamma + \delta)]$$

$$= 2R^2[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\gamma - \delta)]$$

$$\leq 2R^2(1 + 1) \leq 4R^2.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases}$

Chứng minh tương tự : $ad + bc \leq 4R^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ \beta = \gamma \end{cases}$ Vậy : $\begin{cases} ab + cd \leq 4R^2 \\ ad + bc \leq 4R^2 \end{cases}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = \dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông.

E. NĂM 2004

Bài 1. Cho ΔABC. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T = \sin^6\frac{A}{2} + \sin^6\frac{B}{2} + \sin^6\frac{C}{2}.$$

Bài 2. Tìm nghiệm dương của phương trình : $2x + \dfrac{x-1}{x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} + 3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$.

Bài 3. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương đôi một phân biệt $(n \geq 2)$ thỏa mãn điều kiện $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j} = 1$ và $\displaystyle\max_{j=\overline{1,n}} a_j = 2p$ (với p là số nguyên tố).

Tìm tất cả các số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Bài 4. Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Đặt $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$, $A_1B_1 = c_1$. Chứng minh rằng :

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}\right) \geq 3b.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1. Theo bất đẳng thức Bernoulli :

$$\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^6 = \left[1 + \left(4\sin^2\frac{A}{2} - 1\right)\right]^3 \geq 1 + 3\left(4\sin^2\frac{A}{2} - 1\right)$$

$$\geq 1 + 3(1 - 2\cos A) \geq 4 - 6\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \sin^6\frac{A}{2} \geq \frac{1}{2^5}(2 - 3\cos A)$$

Dấy "=" $\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\dfrac{A}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = 60^0$

$$\Leftrightarrow \quad T \geq \frac{1}{2^5}[6 - 3(\cos A + \cos B + \cos C)]$$

$$\geq \frac{1}{2^5}\left[6 - 3\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{3}{64} \quad \left(\text{vì } 1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}\right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều. Vậy : Min$T = \dfrac{3}{64}$.

Bài 2. Điều kiện : $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} \geq 0$

PT $\Leftrightarrow \quad 2x + t^2 = t + 3\sqrt{x+1}.t \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - (1 + 3\sqrt{x+1})t + 2x = 0$

$\Delta = (1 + 3\sqrt{x+1})^2 - 8x = 6\sqrt{x+1} + x + 10 = (\sqrt{x+1} + 3)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t = 2\sqrt{x+1} + 2 \\ t = \sqrt{x+1} - 1 \end{array}\right.$$

- Nếu $t = 2\sqrt{x+1} + 2$, phương trình trở thành :

  $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1} + 2$: phương trình vô nghiệm

  (vì $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} < 1 < 2\sqrt{x+1} + 2$).

- Nếu $t = \sqrt{x+1} - 1$, phương trình trở thành :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x+1} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x} = x + 2 - 2\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x\sqrt{x+1} = x(x+1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{x+1}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \geq 1 \text{ (nhận)}.$$

Bài 3. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} a_j = 2p$

Từ giả thiết $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_j} = \frac{2p-1}{2p}$

$\Rightarrow \quad 2pA = (2p - 1)a_2.a_3....a_n \quad$ (với $A \in N^*$)

$\Rightarrow \quad (2p - 1).a_2.a_3...a_n \,\vdots\, p \Rightarrow \quad a_2.a_3....a_n \,\vdots\, p \quad$ (vì $(p, 2p - 1) = 1$)

$\Rightarrow \quad$ Tồn tại $i \in \{2, 3, ..., n\}$ sao cho $a_i \,\vdots\, p$.

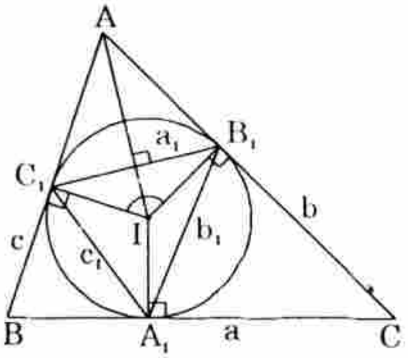
Ta có thể giả sử $a_2 \,\vdots\, p \quad \Rightarrow \quad a_2 = p \quad$ (do $\max\limits_{j=\overline{1,n}} a_j = 2p$)

$\Rightarrow \quad \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{a_j} = \frac{2p-3}{2p} \quad \Rightarrow \quad 2p.B = (2p - 3)a_3.a_4...a_n \quad$ (với $B \in N^*$)

$\Rightarrow \quad 2p - 3 \,\vdots\, p \quad$ (Bạn đọc tự kiểm tra) $\quad \Rightarrow \quad p = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 2 \\ n = 3 \end{cases}$

Vậy : $\left\{\begin{array}{l} n = p = 3 \\ (a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 6) \end{array}\right.$ (không kể hoán vị 3 số a_1, a_2, a_3).

Bài 4. Ta có : $a_1 = 2IB_1\cos\dfrac{A}{2}$



$$= 2(p-a)\tan\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$= (b+c-a)\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_1^2 = \frac{1}{2}(b+c-a)^2(1-\cos A)$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-a)^2\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{4bc}(b+c-a)^2[a^2-(b-c)^2]$$

$$= \frac{1}{4bc}(b+c-a)^2(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= \frac{1}{4bc}[b^2-(a-c)^2][c^2-(a-b)^2] \le \frac{(bc)^2}{4bc} = \frac{bc}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{4}{bc}.$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{1}{b_1^2} \ge \frac{4}{ca}, \qquad \frac{1}{c_1^2} \ge \frac{4}{ab}$$

$$\Rightarrow \quad (a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{c_1^2}\right) \ge 4(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$\ge 4.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.\frac{3}{\sqrt[3]{ab.bc.ca}} \ge 36.$$

Vậy : $(a^2+b^2+c^2)\left(\dfrac{1}{a_1^2}+\dfrac{1}{b_1^2}+\dfrac{1}{c_1^2}\right) \ge 36.$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

F. NĂM 2005

Bài 1. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$y^2 = x^2(x^2+x+1)+(x+1)^2.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

Bài 3. Cho ΔABC, M nằm trên cạnh AC sao cho bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác ABM và BCM bằng nhau. Chứng minh rằng :

$$BM^2 = S.\cot\frac{B}{2}, \text{ trong đó S là diện tích của } \Delta ABC.$$

Bài 4. Cho ΔABC có $2\tan B = \tan A + \tan C$. Chứng minh rằng :

a) $B \geq \dfrac{\pi}{3}$ **b)** $\cos A + \cos C \leq \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Bài 5. Cho $\begin{cases} x, y, z, t \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$F = \frac{x}{2005\sqrt{2005} + yzt} + \frac{y}{2005\sqrt{2005} + xzt} + \frac{z}{2005\sqrt{2005} + xyt} + \frac{t}{2005\sqrt{2005} + xyz}.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1. Từ $y^2 = x^2(x^2 + x + 1) + (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow \quad 4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$

Hơn nữa :

- $(2x^2 + x + 1)^2 = 4x^3 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 < 4x^3 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$
- $(2x^2 + x + 3)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 6x + 9 > 4x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$

$\Rightarrow \quad (2x^2 + x + 1)^2 < 4y^2 < (2x^2 + x + 3)^2$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + x + 1 < 2y < 2x^2 + x + 3 \quad \Rightarrow \quad 2y = 2x^2 + x + 2$

$\Rightarrow \quad 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 4x + 4 = 4x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 4 \Rightarrow y = 19 \end{array}\right.$

Cặp số $\begin{cases} x = 4 \\ y = 19 \end{cases}$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = 4 \\ y = 19 \end{cases}$

Bài 2. Hệ $\begin{cases} x^2(y + z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2 & (1) \\ y^2(z + x)^2 = (4y^2 + y + 1)z^2x^2 & (2) \\ z^2(x + y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2 & (3) \end{cases}$

Các trường hợp :

a) $xyz = 0$:

- Nếu $x = 0$: (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$

Khi đó hệ nhận (0; 0; z), (0; y; 0) là nghiệm ($\forall y, z \in R$).

- Nếu $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ ta làm tương tự.

b) $xyz \neq 0$:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)^2 = 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 4 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt : $a = \dfrac{1}{x}, \quad b = \dfrac{1}{y}, \quad c = \dfrac{1}{z} \quad (abc \neq 0)$

$$\text{Ta có :} \quad + \begin{cases} (b + c)^2 = 3 + a + a^2 & (1') \\ (c + a)^2 = 4 + b + b^2 & (2') \\ (a + b)^2 = 5 + c + c^2 & (3') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (a + b + c)^2 - (a + b + c) - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a + b + c = 4 \\ a + b + c = -3 \end{array}\right.$$

- $a + b + c = 4$ thay vào (1'), (2'), (3') ta tính được :

$$\begin{cases} a = \dfrac{13}{9} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{11}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{13} \\ y = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{9}{11} \end{cases}$$

- $a + b + c = -3$ thay vào (1'), (2'), (3') ta tính được :

$$\begin{cases} a = -\dfrac{6}{5} \\ b = -1 \\ c = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{6} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là :

$(\alpha; 0; 0), (0; \beta; 0), (0; 0; \gamma), \left(\dfrac{9}{13}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{9}{11}\right), \left(-\dfrac{5}{6}; -1; -\dfrac{5}{4}\right)$ ($\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$).

Bài 3.

Gọi $\begin{cases} BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ BM = x \\ p_1, p_2 \text{ là các nửa chu vi của các tam giác ABM và BCM tương ứng} \\ r_1 \text{ là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABM} \end{cases}$

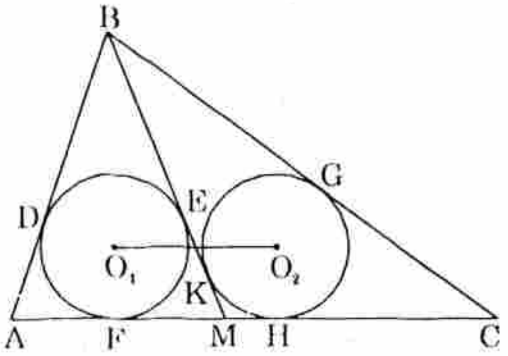
Ta có : $S = p_1r_1 + p_2r_1 \quad \Rightarrow \quad 2S = r_1(a + b + c + 2x)$ (1)

Hơn nữa : $\begin{cases} AF = AD = r_1 \cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(AB + AM - x) \\ CH = CG = r_1 \cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}(CB + CM - x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad r_1\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{2}(a + b + c - 2x) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$S\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = \frac{r_1}{2}(a + b + c + 2x)\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$



$$= \frac{1}{4}(a + b + c + 2x)(a + b + c - 2x)$$

$$= \frac{1}{4}(a + b + c)^2 - x^2 \qquad (3)$$

$$= p^2 - x^2 \qquad \left(\text{với } p = \frac{a + b + c}{2}\right)$$

$$= S\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) - x^2$$

(Bạn đọc tự kiểm tra)

$$\Rightarrow \quad x^2 = S\text{cotg}\frac{B}{2}$$

Bài 4.a) Ta có : $2\tan B = \tan A + \tan C$

$$\Leftrightarrow \quad 2\tan B = \frac{\sin(A + C)}{\cos A.\cos C} = \frac{\sin B}{\cos A.\cos C} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin A\cos C = \cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(A + C) + \cos(A - C) = \cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos(A - C) = 2\cos B$$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \frac{1}{2}\cos(A - C) \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B \ge \frac{\pi}{3}$$

b) Ta có : $(\cos A + \cos C)^2 = 4\left(\cos\dfrac{A + C}{2}.\cos\dfrac{A - C}{2}\right)^2$

$$= 4\sin^2\frac{B}{2}.\frac{1 + \cos(A - C)}{2} = (1 - \cos B)(1 + 2\cos B)$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 2\cos B)(1 + 2\cos B) \le \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \cos A + \cos C \le \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 5. Đặt $a = \dfrac{x}{\sqrt{2005}}$, $b = \dfrac{y}{\sqrt{2005}}$, $c = \dfrac{z}{\sqrt{2005}}$, $d = \dfrac{t}{\sqrt{2005}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a, b, c, d \ge 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \\ F = \dfrac{1}{2005}\left(\dfrac{a}{1 + bcd} + \dfrac{b}{1 + cda} + \dfrac{c}{1 + bda} + \dfrac{d}{1 + abc}\right) \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có :

$$F \ge \frac{1}{2005} \cdot \frac{(a + b + c + d)^2}{a(1 + bcd) + b(1 + cda) + c(1 + bda) + d(1 + abc)}$$

$$\ge \frac{1 + 2(ab + ac + ad + bc + bc + bd + cd)}{2005(a + b + c + d + 4abcd)}$$

Hơn nữa : $1 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - (a + b + c + d + 4abcd)$

$= (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) + ab + ac + ad + bc + bd + cd -$

$- 5abcd + abc + abd + bcd + acd$

$\ge ab(1 - cd) + ac(1 - bd) + ad(1 - bc) + bc(1 - ad) + bd(1 - ac)$

≥ 0

$$\Rightarrow \quad F \ge \frac{1}{2005}.$$

Dấu "=" xảy ra (chẳng hạn) tại $\begin{cases} x = y = z = 0 \\ t = \sqrt{2005} \end{cases}$

Vậy : $\text{Min}F = \dfrac{1}{2005}$.

G. NĂM 2006

Bài 1. Giải phương trình : $(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c và các góc thỏa B = 2A, C = 4A. Tính $T = R^2\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh AB tại T, đường thẳng CT cắt đường tròn tại K khác T. Giả sử K là trung điểm CT và $CT = 6\sqrt{2}$. Hãy tính độ dài các cạnh tam giác ABC.

Bài 4. Chứng minh với mọi m nguyên, tồn tại số nguyên n để :

$$n^3 - 11n^2 - 87n + m \text{ chia hết cho } 191.$$

Bài 5. Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+b^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}} \le 1.$$

Hướng dẫn giải

Bài 1. Giải phương trình : $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$ (1)

Tập xác định R

Đặt $\sqrt{x^2-2x+3} = t$, với $t > 0$.

Khi đó phương trình (1) trở thành : $(x+1)t = x^2+1$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - (x+1)t + 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = x-1 \end{array}\right.$$

- Với t = 2, ta có : $\sqrt{x^2-2x+3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với t = x − 1, ta có : $\sqrt{x^2-2x+3} = x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \ge 0 \\ x^2-2x+3 = (x-1)^2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\{1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\}$.

Bài 2. Ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{1}{2\sin A},\quad \frac{R}{b} = \frac{1}{2\sin B},\quad \frac{R}{c} = \frac{1}{2\sin C}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3 + \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C)$$

. Trong ΔABC : cotA.cotB + cotB.cotC + cotC.cotA = 1

và ta có $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \Rightarrow \cot^2\alpha = 1 + 2\cot\alpha.\cot 2\alpha$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{4}[3 + 3 + 2(\cot A.\cot 2A + \cot B.\cot 2B + \cot C.\cot 2C)]$$

$$= \frac{1}{4}[6 + 2(\cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A)] = \frac{1}{4}(6 + 2) = 2.$$

Bài 3. K là trung điểm của CT và L là tiếp điểm của đường tròn với cạnh BC

Thế thì : $CK = \frac{1}{2}CT$ (*)

Suy ra L trung điểm của BC

$$CL^2 = CK.CT = \frac{1}{2}CT^2 \quad \text{hay} \quad \frac{a^4}{4} = 36 \quad \text{hay} \quad a = 12 \qquad (1)$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BCT, với

$$CT^2 = BT^2 + BC^2 - 2BT.BC.\cos B$$

$$\Leftrightarrow \quad 72 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 144.\cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{3}{4} \qquad (2) \quad \text{do } (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos B = \frac{a}{2b} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có : $(a; b; c) = (12; 8; 8)$.

Câu 4. Đặt : $P(x) = x^3 - 11x^2 - 87x + m$

Ta có : $P(x) \equiv (x + a)^3 + b \pmod{191}$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv x^3 - 11x^2 - 87x + m \pmod{191}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a \equiv -1 \pmod{191} & (1) \\ 3a^2 \equiv -87 \pmod{191} & (2) \\ b \equiv m - a^3 \pmod{191} & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow \quad 3a \equiv 180 \pmod{191} \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv 60 \pmod{191}$

$$\Rightarrow \quad 3a^2 \equiv -87 \pmod{191}$$

Vậy $\forall m \in \mathbb{Z}$, tồn tại số nguyên a, b để $P(x) \equiv (x + a)^3 + b \pmod{191}$

Nhận xét : 191 là số nguyên tố dạng $191 = 3k + 2$

$$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow \quad (i + a)^3 \equiv (j + a)^3 \pmod{191}$$

Đặt $u = i + a$, $v = j + a$ thì $u^3 \equiv v^3 \pmod{191} \Rightarrow \quad u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$

$u^{3k}v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} \equiv v \pmod{191}$ (định lí Ferma) (1)

$\Rightarrow v^2 \equiv u^{3k}v^3 \equiv u^{3k+3} \pmod{191}$

$\Rightarrow u^{3k}v^2 \equiv u^{3k}.u^{3k+3} \equiv u^{3k}v^3 \equiv u^{3k+1}.u^{3k+2} \equiv u^{3k+1}.u^{191} = u^{3k+1}.u \pmod{191}$

$\equiv u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}$ (2)

(1) và (2) suy ra : $u \equiv v \pmod{191} \quad \Rightarrow \quad i \equiv j \pmod{191}$

Vậy nếu $\forall i, j \in \{1, 2, ..., 191\}$: $i \neq j \pmod{191}$ thì $P(i) \neq P(j) \pmod{191}$

Suy ra tồn tại n ∈ {1, 2, ..., 191} sao cho P(n) ≡ 191 (mod 191) tức là P(n) ⋮ 191

Vậy với mọi giá trị nguyên của m, luôn tồn tại số nguyên n để P(n) ⋮ 191.

Bài 5. $\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2} = \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)}$

$$= \sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^6+2a^3c^3+c^6)}$$

$$= \sqrt[3]{(a^{12}+2a^3b^6c^3)+(2a^9c^3+b^6c^6)+a^6b^6+a^6c^6}$$

$$\geq \sqrt[3]{a^6b^6+3a^6b^4c^2+3a^6b^2c^4+a^6c^6} = \sqrt[3]{(a^2b^2+a^2c^2)^3} = a^2b^2+a^2c^2$$

Suy ra : $$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} \leq \frac{a^4}{a^4+a^2b^2+a^2c^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự : $$\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} \leq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}} \leq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có :

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}} \leq 1.$$

Phụ lục 2

ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ OLYMPIC 30 – 4 CỦA TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN, TPHCM NĂM 2006

Bài 1. Cho tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC có độ dài là a. Chia BC 101 phần bằng nhau. Khi đó tam giác ABC được chia thành101 tam giác nhỏ và tam giác ở chính giữa có góc tại đỉnh A bằng α. Gọi h là khoảng cách từ A đến BC. Chứng minh rằng : $\tan\alpha = \dfrac{101h}{2550a}$.

Bài 2. Tìm tất cả các số thực m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} = m-1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1} = m+1 \end{cases}$$

Bài 3. Tổng của m số dương chẵn khác nhau và n số dương lẻ khác nhau là 2001. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = 5m + 2n.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1 thì $\frac{13}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Bài 1. Gọi AMN là tam giác ở chính giữa có diện tích là S, ta có :

$$BM = CN = \frac{50a}{101}, \quad MN = \frac{a}{101} \quad \text{và} \quad S = \frac{1}{2}MN.h = \frac{h.a}{202}$$

Gọi I là trung điểm của BC. Trong tam giác AMN, ta có :

$$AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \frac{MN^2}{2} \text{ với } AI = \frac{a}{2} \Rightarrow AM^2 + AN^2 = \frac{5101a^2}{10201}$$

Vậy $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2S}{AM.AN}.\frac{2AM.AN}{AM^2 + AN^2 - MN^2} = \frac{101h}{2550a}$.

Bài 2. Điều kiện : x, y, z ≥ 1

• Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}) + (\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}) = 2m \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) + (\sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}) = 2 \end{cases}$

Đặt : $u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$, $v = \sqrt{y+1} + \sqrt{y-1}$, $w = \sqrt{z+1} + \sqrt{z-1}$

Do x, y, z ≥ 1 nên u, v, w ≥ $\sqrt{2}$. Ngược lại nếu u, v, w ≥ $\sqrt{2}$ ta có :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{u} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}\left(u + \frac{2}{u}\right)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}\left(u^2 + \frac{4}{u^2}\right) \ge 1$$

Tương tự y, z ≥ 1

Vậy bài toán đã cho trở thành : Tìm tất cả các số thực m sao cho hệ sau có nghiệm u, v, w ≥ $\sqrt{2}$: $\begin{cases} u + v + w = 2a \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1 \end{cases}$ (I)

Điều kiện cần : Giả sử (I) có nghiệm (u, v, w).

Theo BĐT Bunhiacopski, ta có :

$$2m = (u + v + w)\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}\right) \ge 9 \quad \Rightarrow \quad m \ge \frac{9}{2}$$

Điều kiện đủ : Giả sử $m \ge \frac{9}{2}$, ta chứng minh (I) có nghiệm.

Lấy w = 3 (thỏa w ≥ $\sqrt{2}$).

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2m - 3 \\ uv = \dfrac{3(2m-3)}{2} \end{cases}$. Khi đó u, v là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - (2m-3)X + \frac{3(2m-3)}{2} = 0$$

$$\Delta = (2m-3)(2m-9) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u, v = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{(2m-3)(2m-9)}}{2}$$

Ta có : $(2m-3)(2m-9) = h(h+6) < (h+3)^2$

$$< (h + 6 - 2\sqrt{2})^2, \quad h = 2m - 9 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 2m - 3 - 2\sqrt{2} > \sqrt{(2m-3)(2m-9)} \quad \Rightarrow \quad u, v \geq \sqrt{2}.$$

Như vậy (I) có nghiệm u, v, w $\geq \sqrt{2}$.

Tóm lại $m \geq \dfrac{9}{2}$ là tất cả các giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 3.

- Tổng của m số dương chẵn khác nhau $\geq 2 + 4 + \ldots + 2m = 2.\dfrac{m(m+1)}{2}$

$$= m^2 + m.$$

- Tổng của n số dương lẻ khác nhau $\geq 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$

  Vì vậy từ giả thiết suy ra $2001 \geq m^2 + m + n^2 = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \leq 2001 + \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Ta có : $A = 5m + 2n = 5\left(m + \dfrac{1}{2}\right) + 2n - \dfrac{5}{2} \leq$

$$\leq \sqrt{(5^2 + 2^2)\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2\right]} - \frac{5}{2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \leq \sqrt{29\left(2001 + \dfrac{1}{4}\right)} - \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad A \leq 238,407 \qquad (3)$

Vì m, n nguyên dương nên A = 5m + 2n là nguyên dương. Vì thế từ (3) ta có $A \leq 238$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 5m + 2n = 238 & (5) \\ m^2 + m + n^2 = 2001 & (6) \end{cases}$

Giải (5) : $(m_0; n_0) = (0; 119)$ là một nghiệm riêng của (5). Do đó (5) có vô số nghiệm (m; n) xác định bởi : $\begin{cases} m = 2t \\ n = 119 - 5t \end{cases}$ $(t \in Z)$

Vì m, n > 0 nên ta có $\begin{cases} 2t > 0 \\ 119 - 5t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < \dfrac{119}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad 0 < t < 23, \ t \in Z$

Thay vào (6) ta được : $4t^2 + 2t + (119 - 5t)^2 = 2001$

$\Leftrightarrow \quad 29t^2 - 1188t + 12160 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 20.$

Khi đó $\begin{cases} m = 40 \\ n = 19 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 238 khi m = 40, n = 19.

Bài 4. *Chứng minh* : $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \dfrac{1}{2}$

Gọi S là diện tích tam giác, ta có :

$S = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - a\right)\left(\dfrac{1}{2} - b\right)\left(\dfrac{1}{2} - c\right)}$ hay $16S^2 = (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c)$ (1)

Vì $16S^2 > 0$ nên từ (1) suy ra :

$(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) > 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 + 4(ab + bc + ca) - 8abc - 2(a + b + c) > 0$

$\Leftrightarrow \quad -1 + 4(ab + bc + ca) - 8abc > 0$

$\Leftrightarrow \quad -1 + 2[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] - 8abc > 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 2(a^2 + b^2 + c^2) - 8abc > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \dfrac{1}{2}.$

Chứng minh : $T = a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \geq \dfrac{13}{27}$

Ta dễ dàng chứng minh được : $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ (2)

Từ (2) ta có : $abc \geq (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c)$

$\Leftrightarrow \quad abc \geq 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8abc$

$\Leftrightarrow \quad 9abc \geq -1 + 4(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow \quad abc \geq -\dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9}(ab + bc + ca)$

Do đó : $T \geq (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - \dfrac{4}{9} + \dfrac{16}{9}(ab + bc + ca)$

$= \dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{9}(ab + bc + ca)$

Mà $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ nên $T \geq \dfrac{5}{9} - \dfrac{2}{27}(a + b + c)^2 = \dfrac{13}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

MỤC LỤC

Chương I : MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

§1. Mệnh đề 3

§2. Tập hợp 16

Chương II : HÀM SỐ 23

Chương III : PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Phương trình bậc nhất 35

§2. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số 37

§3. Bất phương trình bậc nhất 42

§4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn số 47

§5. Phương trình và bất phương trình bậc hai 50

§6. Hệ phương trình bậc hai 84

§7. Hệ bất phương trình 99

§8. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối 102

§9. Bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối 107

§10. Phương trình chứa căn 110

§11. Bất phương trình chứa căn 115

Chương IV : BẤT ĐẲNG THỨC, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 120

Phụ lục 1 : GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI CHÍNH THỨC OLYMPIC 30-4 (KHỐI 10) TỪ NĂM 2000 – 2006 152

Phụ lục 2 : ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ OLYMPIC 30 – 4 CỦA TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN TPHCM NĂM 2006 179

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9715012; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: SINH VIÊN
PHƯƠNG THẢO

Sửa bài: PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

CÁC CHỦ ĐỀ ĐẠI SỐ 10 NÂNG CAO

Mã số: 1L –97 ĐH 2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Công ty PTCN Truyền hình – Tp.HCM.

Số xuất bản: 564 - 2006/CXB/4 – 94/ĐHQGHN, ngày 21/07/2006.

Quyết định xuất bản số: 249 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.